Université de Caen
Basse-Normandie

Mathématiques conceptuelles

Rapport de recherche
— 2000 - A —

L'art de l'esquisse (3) : esquisse d'endosurjection

PIERRE AGERON

Département de mathématiques et mécanique, UFR des Sciences, Université de Caen, 14032 Caen Cedex
téléphone : 02 31 56 73 22 — télécopie : 02 31 56 73 20 — site internet : http ://www.math.unicaen.fr

Pierre Ageron

L'ART DE L'ESQUISSE (3) : ESQUISSE D'ENDOSURJECTION

La série « l'Art de l'esquisse » a pour but d'enrichir le traditionnel corpus d'exemples d'esquisses construites « à la main » et d'illustrer ou compléter ainsi certains résultats théoriques obtenus ces dernières années. Dans cette troisième livraison...

RÉSUMÉ. ... nous décrivons une esquisse projective, à cônes d'indexation connexe et dénombrable, dont la catégorie des modèles est équivalente à la catégorie des ensembles munis d'une endoapplication surjective. Nous montrons de plus que cette catégorie n'est pas équivalente à la catégorie des modèles d'une esquisse projective à cônes d'indexation finie.

ABSTRACT. We describe a projective sketch, with connected countable cones, whose category of models is equivalent to the category of sets equipped with a surjective endomap. We also prove that this category is not equivalent to the category of models of any projective sketch with finite cones.

ZUSAMMENFASSUNG. Wir beschrieben eine zusammenhängend- und abzählbarstellige Limesskizze, deren Modellkategorie zur Kategorie der Mengen mit einer surjektiven Selbstabbildung äquivalent ist. Außerdem beweisen wir, daß diese Kategorie nicht zur Modellkategorie einer endlichstelligen Limesskizze äquivalent ist.

Je remercie Michel Hébert, de l'Université américaine du Caire, de m'avoir par ses questions poussé à l'étude sérieuse de l'exemple-clef des endosurjections, mentionné un peu légèrement en [E.I.P.I].

Notons $\mathbb{E}$ndosurj la sous-catégorie pleine de $\mathbb{E}\mathrm{ns}^{\circlearrowleft}$ dont les objets sont les couples (X, f), où X est un ensemble et f une application surjective de X sur X.

Il est facile de voir que $\mathbb{E}$ndosurj est esquissable par une esquisse (purement) inductive, formé d'un seul objet X et d'une spécification d'épimorphisme $f : X \to X$. (Remarquons qu'une spécification d'épimorphisme régulier conduirait à une esquisse mixte.)

Il en résulte que $\mathbb{E}$ndosurj est accessible et cocomplète, les limites inductives s'y calculant comme dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}^{\circlearrowleft}$. Elle est par conséquent (ré-)esquissable par une esquisse (purement) projective. Cependant, rien ne permet a priori d'évaluer le cardinal des indexations des cônes projectifs distingués d'une telle esquisse. Le but de ce travail est donc d'une part de construire explicitement une telle esquisse, dont les cônes projectifs distingués seront d'indexation *dénombrable*, d'autre part de montrer qu'aucune esquisse à cônes projectifs distingués d'indexation *finie* ne saurait convenir.

L'idée de départ est qu'un objet (X, f) de $\mathbb{E}$ndosurj est entièrement déterminé par la donnée (évidemment surabondante) des familles $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ d'éléments de X vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{Z} \qquad f(x_{i-1}) = x_i.$$

En effet, si f est surjective, tout élément de X apparaît dans au moins une de ces familles.

Nous allons en fait montrer que $\mathbb{E}$ndosurj est équivalente à la catégorie des modèles d'une certaine théorie $\mathbb{T}$, écrite dans la logique L_{ω_1,ω_1} au moyen d'un symbole fonctionnel unaire σ et d'une famille $(R_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ de symboles relationnels binaires. La théorie $\mathbb{T}$ comporte des axiomes exprimant que σ est (réalisé en) une bijection, que chaque R_i est (réalisé en) une relation d'équivalence, ainsi que les axiomes et schémas d'axiomes suivants :

$$(\bigwedge_{i\in\mathbb{Z}} R_i(t,t')) \Rightarrow (t = t') \qquad (A)$$

$$\forall t\, \forall t' \quad R_i(t,t') \Rightarrow R_{i+1}(t,t') \qquad (B_i)$$

$$\forall t\, \forall t' \quad R_{i+1}(t,t') \iff R_i(\sigma(t),\sigma(t')) \qquad (C_i)$$

$$\forall (t_i)_{i\in\mathbb{Z}} \quad (\bigwedge_{i\in\mathbb{Z}} R_i(t_{i-1},t_i)) \Rightarrow (\exists!\, t \bigwedge_{i\in\mathbb{Z}} R_i(t,t_i)) \qquad (D)$$

Expliquons comment fonctionne l'équivalence de catégories entre $\mathbb{E}$ndosurj et $\mathbb{M}$od($\mathbb{T}$). Pour alléger, nous nous limitons à sa description au niveau des objets.

• *construction d'un foncteur* $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{T})$

Si (X, f) est un ensemble muni d'une endosurjection, on pose

$$\phi(X, f) = (T, \sigma, (R_i)_{i\in\mathbb{Z}})$$

où

$$T = \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \;/\; \forall i \in \mathbb{Z} \quad f(x_{i-1}) = x_i\}$$

$$\sigma((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$$

$$R_j((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}), (x'_i)_{i\in\mathbb{Z}}) \iff x_j = x'_j$$

et on vérifie facilement que $(T, \sigma, (R_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ est un modèle de $\mathbb{T}$.

• *construction d'un foncteur* $\psi : \mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$

Si $(T, \sigma, (R_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ est un modèle de $\mathbb{T}$, on pose

$$\psi(T, \sigma, (R_i)_{i\in\mathbb{Z}}) = (X, f)$$

où

$$X = T/R_0$$

$$f(\bar{t}) = \overline{\sigma(t)}$$

($\bar{t}$ désignant la classe de t modulo R_0) ; on vérifie facilement que f est bien définie et surjective de X sur X.

• *démonstration de* $\phi \circ \psi \cong \mathrm{id}_{\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{T})}$

Partant d'un modèle $(T, \sigma, (R_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ de la théorie $\mathbb{T}$, on note T' l'ensemble sous-jacent à $\phi \circ \psi\,(T, \sigma, (R_i)_{i\in\mathbb{Z}})$ et on considère l'application

$$h : T \to T' \;,\; t \mapsto (\overline{\sigma^i(t)})_{i\in\mathbb{Z}}$$

Montrons que h est injective : si $h(t) = h(t')$, alors $R_0(\sigma^i(t), \sigma^i(t'))$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et donc $R_i(t, t')$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ en appliquant plusieurs fois le schéma d'axiomes (C_i) ; on conclut $t = t'$ avec l'axiome (A). Montrons ensuite que h est surjective : si $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est un élément de T', c'est-à-dire une suite d'éléments de T/R_0 telle que $f(x_{i-1}) = x_i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

on choisit dans T pour chaque i un représentant t_i de x_i ; par définition de f, on a alors $R_0(\sigma(t_{i-1}), t_i)$ pour tout i et donc en appliquant plusieurs fois le schéma d'axiomes (C_i)

$$\bigwedge_{i \in \mathbb{Z}} R_i(\sigma^{-(i-1)}(t_{i-1}), \sigma^{-i}(t_i)) \quad ;$$

d'après l'axiome (D), il vient alors l'existence d'un (unique) $t \in T$ tel que

$$\bigwedge_{i \in \mathbb{Z}} R_i(t, \sigma^{-i}(t_i))) \quad ;$$

pour cette valeur de t, on obtient alors

$$\bigwedge_{i \in \mathbb{Z}} R_0(\sigma^i(t), t_i)$$

d'où $h(t) = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$.

• *démonstration de $\psi \circ \phi \cong \mathrm{id}_{\mathbb{E}\mathrm{ndosurj}}$*

Partant d'un objet (X, f) de $\mathbb{E}$ndosurj, on note X' l'ensemble sous-jacent à $\psi \circ \phi\ (X, f)$ et on considère l'application

$$k : X \to X' \ , \ x \mapsto \{ (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \ / \ x_0 = x \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad f(x_{i-1}) = x_i \}$$

Alors k est, par construction, bijective.

En examinant les axiomes de $\mathbb{T}$, on remarque que tous sont de la forme :

$$\forall (x_i)_{i \in I} \quad (\bigwedge_{k \in K} \phi_k(x_i)) \quad \Rightarrow \quad (\exists ! (y_j)_{j \in J} \quad \bigwedge_{l \in L} \psi_l(x_i, y_j))$$

où I, J, K, L sont des ensembles dénombrables et les ϕ_k et ψ_l sont des formules atomiques. Il est bien connu que les catégories de modèles de telles théories sont exactement, à équivalence près, les catégories de modèles des esquisses projectives avec cônes projectifs distingués d'indexation dénombrable. Remarquons de plus que si l'on prend soin, en construisant une telle esquisse, d'y spécifier les relations R_i comme des familles monomorphes (et non comme des sous-objets de produits), tous les cônes projectifs distingués sont aussi d'indexation *connexe*. Rappelons que les catégories de modèles des esquisses dont tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation connexe ont été caractérisées dans [L.I.P.P.].

Sachant que la catégorie $\mathbb{E}$ndosurj peut être esquissée par une esquisse inductive particulièrement simple, il est naturel de se demander si elle pourrait être esquissée par une esquisse projective à cônes projectifs d'indexation finie. Nous prouvons ci-dessous que ce n'est pas le cas, en montrant (ce qui revient au même d'après la théorie classique de Gabriel-Ulmer) que $\mathbb{E}$ndosurj n'est pas localement finiment présentable.

Définissons $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$p(n+1) = n$$

$$p(0) = 0.$$

Il est clair que $(\mathbb{N}, p)$ est un objet de $\mathbb{E}$ndosurj ; nous allons montrer qu'il n'est pas limite inductive filtrante d'objets finiment présentables. Pour cela, définissons $q : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$q(m+1, k) = (m, k)$$

$$q(0, k+1) = (0, k)$$

$$q(0,0) = (0,0).$$

Alors $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, q)$ est aussi un objet de $\mathbb{E}$ndosurj. Il en est de même, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, de $(\mathbb{N} \times \{0, \dots, k\},\ q\,|_{\mathbb{N}\times\{0,\dots,k\}})$. Ces derniers objets admettent clairement $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, q)$ comme limite inductive filtrante. Remarquons encore que l'application h qui envoie k sur $(0, k)$ est un morphisme de $(\mathbb{N}, p)$ vers $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, q)$. Soient maintenant (F, s) un quelconque objet finiment présentable de $\mathbb{E}$ndosurj et g un morphisme de (F, s) vers $(\mathbb{N}, p)$: par définition d'un finiment présentable, il doit alors exister $k \in \mathbb{N}$ tel que $h \circ f$ factorise à travers $\mathbb{N} \times \{0, \dots, k\}$. Mais puisque s est surjective, on voit facilement que ceci implique $g[F] \subset \{0\}$; a fortiori, $(\mathbb{N}, p)$ n'est pas limite inductive filtrante d'objets finiment présentables.

RÉFÉRENCES.

[E.I.P.I.] P. AGERON, *Esquisses inductives et esquisses presque inductives*, rapport de recherche SDAD/Université de Caen, 2000-14

[L.I.P.P.] P. AGERON, *Limites inductives point par point dans les catégories accessibles*, rapport de recherche SDAD/Université de Caen, 1999-25.