Université de Caen
CNRS ESA 6081

Structures Discrètes & Analyse Diophantienne

Rapport de recherche
– 2000-15 –

L'art de l'esquisse (1) : esquisse de nombre réel

Pierre AGERON

Laboratoire SDAD, Mathématiques BP. 5186, Université campus 2, 14 032 Caen cedex, France
email : sdad@math.unicaen.fr **tel** : +33 231 56 73 22 **fax** : +33 231 56 73 20
internet : http://www.math.unicaen.fr/sdad/

Pierre Ageron

L'ART DE L'ESQUISSE (1) : ESQUISSE DE NOMBRE RÉEL

RÉSUMÉ. La série « l'Art de l'esquisse » a pour but d'enrichir le traditionnel corpus d'exemples d'esquisses construites « à la main » et d'illustrer ainsi certains résultats théoriques obtenus ces dernières années. Dans cette première livraison [1], nous décrivons une esquisse dont la catégorie des modèles est équivalente à la droite réelle achevéee $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, puis nous indiquons comment la modifier pour obtenir des catégories de modèles équivalentes, respectivement, à $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, à $\mathbb{R}$ et à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

1. COUPURES ET ESQUISSES.

L'objectif est d'esquisser la droite réelle achevéee $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$, vue comme (petite) catégorie. On part de cette idée de Dedekind qu'il estimait « si peu féconde » : un réel est défini par une coupure dans la droite rationnelle $\mathbb{Q}$. Rappelons qu'une coupure est un couple (A', A'') de parties de $\mathbb{Q}$ vérifiant :

$$A' \leq A'' \quad ; \quad A' \cap A'' = \emptyset \quad ; \quad A' \cup A'' = \mathbb{Q}.$$

Pour représenter aussi $-\infty$ et $+\infty$, on n'imposera pas ici à A' et A'' d'être non vides. Pour éviter d'avoir deux représentations possibles du rationnel q (selon que q lui-même est élément de A' ou de A''), on devra se restreindre aux coupures *gauches*, vérifiant l'axiome supplémentaire suivant : *si pour tout $q' < q$ on a $q' \in A'$, alors $q \in A'$.*

[1] Il s'agit de la rédaction d'une conférence donnée le 17 juin 2000 à l'Université du Littoral (Dunkerque).

Les coupures sont en bijection avec les applications décroissantes M de $\mathbb{Q}$ dans $\{0, 1\}$:

$$q \in A' \iff M(q) = 1$$

$$q \in A'' \iff M(q) = 0.$$

Les coupures gauches correspondent à celles de ces applications qui vérifient pour tout $q \in \mathbb{Q}$:

$$M(q) = \inf_{q'<q} M(q').$$

Pour représenter les éléments de $\bar{\mathbb{R}}$ comme foncteurs à valeurs ensemblistes, il reste à noter que l'ensemble ordonné $\{0, 1\}$ est équivalent à la sous-catégorie pleine de $\mathbb{E}$ns dont les objets sont les sous-singletons. Rappelons (cf. [Ageron99]) qu'un sous-singleton est un ensemble X ayant au plus un élément, ce qui équivaut au fait que le cône

$$X \xleftarrow{\text{id}} X \xrightarrow{\text{id}} X$$

est un cône produit dans la catégorie $\mathbb{E}$ns. On obtient ainsi l'esquisse projective $\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{R}}}$ suivante :

PROPOSITION.— *La catégorie des modèles de l'esquisse suivante est équivalente à l'ensemble ordonné* $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ *:*
— *son support est l'ensemble ordonné* $(\mathbb{Q}, \geq)$ *;*
— *pour chaque* $q \in \mathbb{Q}$*, on distingue le cône projectif d'indexation discrète* $q \leftarrow q \rightarrow q$ (2) *;*
— *pour chaque* $q \in \mathbb{Q}$*, on distingue le cône projectif d'indexation discrète* $q' \leftarrow q \quad (q' < q)$.

DÉMONSTRATION.— Il est clair qu'un modèle M de $\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{R}}}$ dans $\mathbb{E}$ns s'identifie à une coupure gauche dans $\mathbb{Q}$, et donc à un élément de $\bar{\mathbb{R}}$. De plus, il existe un morphisme, nécessairement unique, de M vers N si et seulement si : $\forall q \in \mathbb{Q} \quad M(q) = 1 \Rightarrow N(q) = 1$. Cette condition correspond à l'inégalité $M \leq N$ sur les éléments de $\bar{\mathbb{R}}$ associés. On a donc bien : $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{R}}}) \simeq \bar{\mathbb{R}}$. C.Q.F.D.

(2) C'est pour éviter de recourir à un logiciel graphique compliqué que nos cônes sont dessinés sur une ligne. Mais cette représentation semble finalement assez suggestive vu la nature unidimensionnelle du problème.

2. QUELQUES VARIATIONS NON ALGÉBRIQUES.

Esquissons à présent l'ensemble ordonné $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, c'est-à-dire $[-\infty, +\infty[$. De l'analyse précédente doit être exclu le modèle correspondant à $+\infty$: il s'agit du foncteur constant tel que $M(q) = \mathbf{1}$ pour tout q. Cela revient à ne garder que les modèles M tels que :

$$\prod_{q \in \mathbb{Q}} M(q) = \emptyset.$$

Afin de traduire cette formule, on augmentera le support de l'esquisse $\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{R}}}$ en $(\mathbb{Q} \cup \{+\infty\}, \geq)$ pour y distinguer les cônes supplémentaires suivants :
— le cône inductif d'indexation vide $\qquad \to +\infty \qquad ;$
— le cône projectif d'indexation discrète $\quad q \leftarrow +\infty \qquad (q \in \mathbb{Q})$.

Symétriquement, pour esquisser $]-\infty, +\infty]$, il faut exclure le foncteur constant tel que $M(q) = \emptyset$ pour tout q, ce qui revient à imposer $\sum_{q \in \mathbb{Q}} M(q) \neq \emptyset$, qu'on traduira par :

$$\varinjlim_{q \in \mathbb{Q}} M(q) = \mathbf{1}.$$

On augmentera donc le support de l'esquisse $\mathbb{E}_{\bar{\mathbb{R}}}$ en $(\mathbb{Q} \cup \{-\infty\}, \geq)$ et on y distinguera les cônes supplémentaires suivants :
— le cône projectif d'indexation vide $\qquad -\infty \to \qquad ;$
— le cône inductif d'indexation non discrète $\quad -\infty \leftarrow q \qquad (q \in \mathbb{Q})$.

En prenant comme support l'ensemble ordonné $(\bar{\mathbb{Q}}, \geq)$ et en y distinguant tous les cônes projectifs ou inductifs apparaissant dans les deux esquisses $\mathbb{E}_{[-\infty,+\infty[}$ et $\mathbb{E}_{]-\infty,+\infty]}$ ci-dessus, on obtient une « esquisse de réel », c'est-à-dire une esquisse $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}$ telle que la catégorie $\mathbb{M}\mathrm{od}(\mathbb{E}_{\mathbb{R}})$ soit équivalente à $\mathbb{R}$.

Enfin, il est facile d'en déduire une « esquisse d'irrationnel » $\mathbb{E}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$, dont la catégorie des modèles est équivalente à l'ensemble ordonné $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. En effet, un modèle M de $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}$ correspond à un irrationnel si et seulement si, pour chaque rationnel q, on a :

$$M(q) = \varinjlim_{q'' < q} M(q'')$$

On esquisse ainsi le foncteur d'oubli (c'est-à-dire d'inclusion) de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. On peut de même (nous le laissons en exercice) esquisser le foncteur d'oubli de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

3. REMARQUES.

Les esquisses ci-dessus illustrent de manière intéressante nombre de théorèmes obtenus ces dernières années sur la classification des esquisses et des catégories accessibles, et en suggèrent d'autres.

Observons par exemple les faits suivants au sujet de l'esquisse $\mathbb{E}_{[-\infty,+\infty[}$:

(1) tous ses cônes projectifs distingués sont d'indexation dénombrable ([3]) et non vide ;
(2) tous ses cônes inductifs distingués sont d'indexation vide.

Quelles sont les propriétés de la catégorie associée à l'ensemble ordonné $[-\infty,+\infty[$ qui sont reflétées par (1) et (2) ? En combinant les résultats de [Ageron95] et [Ageron99], on obtient :

PROPOSITION.— *Les catégories de modèles des esquisses vérifiant* (1) *et* (2) *sont exactement (à équivalence près) les catégories localement petites* $\mathbb{A}$ *telles que :*

(*a*) $\mathbb{A}$ *est* $\aleph_1$*-accessible*
(c'est-à-dire possède les limites inductives $\aleph_1$*-filtrantes et contient un ensemble d'objets* $\aleph_1$*-présentables dont tout objet de* $\mathbb{A}$ *soit limite inductive* $\aleph_1$*-filtrante) ;*
(*b*) $\mathbb{A}$ *possède un objet initial strict ;*
(*c*) $\mathbb{A}$ *possède les limites projectives d'indexation non vide.*

Il est bien exact que l'ensemble ordonné $[-\infty,+\infty[$, vu comme catégorie, remplit ces conditions. On remarquera en particulier que tous ses objets sont $\aleph_1$-présentables ([4]) et que $-\infty$ en est un objet initial strict.

Nous aurions pu être un peu plus précis lors de nos observations concernant $\mathbb{E}_{[-\infty,+\infty[}$ et remarquer, de surcroît, que tous ses cônes projectifs distingués sont d'indexation discrète. Se pose alors le problème de caractériser les catégories de modèles des esquisses dont :

(1′) tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation dénombrable, non vide et discrète ;
(2) tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation vide.

La question est plus délicate que la précédente. Sans y insister, disons qu'il convient de remplacer, dans la proposition ci-dessus, les limites inductives $\aleph_1$-filtrantes par des limites inductives plus générales, dites « $\aleph_1$-tamisantes ». On définit d'abord les limites inductives $\aleph_1$-tamisantes dans $\mathbb{E}$ns comme étant celles qui commutent aux produits dénombrables. Mais attention : à la différence des limites inductives $\aleph_1$-filtrantes, à la différence aussi des limites inductives $\aleph_0$-tamisantes, les limites inductives $\aleph_1$-tamisantes dans $\mathbb{E}$ns ne peuvent pas être

---

([3]) L'adjectif « dénombrable » signifie ici « de cardinal $< \aleph_1$ ».
([4]) Indépendamment de l'hypothèse du continu, contrairement à ce que dit [Borceux-Quinteiro-Rosický98].

décrites comme celles qui sont indexées par une certaine classe de petites catégories, ce qui induit certaines précautions : nous renvoyons ici à [Adámek-Koubek-Velebil++] ([5]).

Voici maintenant une observation concernant l'esquisse $\mathbb{E}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$:

— tous ses cônes inductifs distingués sont d'indexation vide ou filtrante.

Ceci s'accorde avec le théorème suivant ([Ageron95]) : *les catégories de modèles des esquisses dont tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation vide ou filtrante sont exactement (à équivalence près) les catégories accessibles possédant les limites projectives d'indexation finie et non vide.* Il est bien exact que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ remplit ces conditions.

Que dire de l'ensemble ordonné $]-\infty,+\infty]$? Vu comme comme catégorie, il est $\aleph_1$-accessible et possède les limites projectives *conditionnelles* au sens suivant : tout diagramme qui est base d'au moins un cône projectif admet une limite projective. Dans [Ageron97], on a décrit une classe d'esquisses dont les catégories de modèles sont exactement les catégories $\aleph_1$-accessibles possédant les limites projectives conditionnelles. Il s'agit des esquisses dont :

— tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation dénombrable ;

— les cônes inductifs distingués forment un ensemble dénombrable et ont tous :

+ pour sommet le sommet d'un cône projectif distingué d'indexation vide,

+ pour indexation une petite catégorie possédant les limites projectives d'indexation dénombrable non vide, ces cônes projectifs limites étant tous distingués.

Mais l'esquisse $\mathbb{E}_{]-\infty,+\infty]}$ décrite plus haut n'est pas de cette forme ! Elle a en effet un cône inductif distingué indexé par l'ensemble ordonné $(\mathbb{Q},\geq)$: celui-ci, vu comme petite catégorie, ne possède pas toutes les limites projectives d'indexation dénombrable et non vide. Il est cependant aisé de la modifier en une esquisse de la forme attendue. Il suffit pour cela de remplacer le support $(\mathbb{Q}\cup\{-\infty\},\geq)$ par $(\mathbb{R}\cup\{-\infty\},\geq)$ et d'y distinguer les cônes suivants :

— pour chaque $r\in\mathbb{R}$, le cône projectif d'indexation discrète $r\leftarrow r\rightarrow r$;

— pour chaque $r\in\mathbb{R}$, le cône projectif d'indexation discrète $q\leftarrow r$ $(q\in\mathbb{Q}\cap]-\infty,r[)$;

— le cône projectif d'indexation vide $-\infty\rightarrow$;

— le cône inductif d'indexation non discrète $-\infty\leftarrow r$ $(r\in\mathbb{R})$.

On l'aura compris : l'idée de cette esquisse modifiée est de représenter les réels non plus comme coupures dans $\mathbb{Q}$, mais comme coupures dans $\mathbb{R}$ ...

([5]) Notons cependant qu'on a depuis longtemps reconnu et étudié un phénomène analogue dans les cas des limites inductives $\aleph_0$-fibrantes (resp. ∞-fibrantes) dans Ens, définies comme celles qui commutent aux produits fibrés finis (resp. finis ou infinis) : on se reportera à [Ageron92], [Ageron96] et [Ageron99]. Ces références sont malencontreusement omises dans [Adámek-Koubek-Velebil++], alors que la « strategy » qu'ils adoptent pour obvier la difficulté est évidemment la même.

Ce point de vue peut paraître saugrenu, voire tautologique, si l'on considère les esquisses comme des objets syntaxiques, définissant des structures. Il est pourtant conforme à la méthode « canonique » de construction d'esquisses. Dans celle-ci, en effet, on prend comme objets de départ de l'esquisse les objets α-présentables de la catégorie à esquisser, où α est un cardinal régulier suffisamment grand — puis on augmente éventuellement cet ensemble d'objets. Dans le cas de $]-\infty, +\infty]$, le cardinal $\alpha = \aleph_0$ ne suffit pas, car il n'y a aucun objet finiment présentable. Mais $\alpha = \aleph_1$ paraît déjà trop fort, puisque tous les objets sont dénombrablement présentables (sauf $+\infty$). Les esquisses construites dans les paragraphes **1.** et **2.** ne sont donc pas des esquisses canoniques. C'est leur principal intérêt.

BIBLIOGRAPHIE

[Adámek-Koubek-Velebil++] Jiří ADÁMEK, Václav KOUBEK and Jiří VELEBIL, *Duality between infinitary varieties and algebraic theories*, prépublication, 13 p.

[Ageron92] Pierre AGERON, *The logic of structures*, Journal of Pure and Applied Algebra 79 (1992) 15-34

[Ageron95] Pierre AGERON, *Catégories accessibles à limites projectives non vides et catégories accessibles à limites projectives finies*, Diagrammes 34 (1995) 1-10

[Ageron96] Pierre AGERON, *Catégories accessibles à produits fibrés*, Diagrammes 36 (1996) 1-11

[Ageron97] Pierre AGERON, *Limites projectives conditionnelles dans les catégories accessibles*, Diagrammes 38 (1997) 3-18

[Ageron99] Pierre AGERON, *Limites inductives point par point dans les catégories accessibles*, Diagrammes, à paraître

[Borceux-Quinteiro-Rosický98] Francis BORCEUX, Carmen QUINTEIRO and Jiří ROSICKÝ, *A theory of enriched sketches*, Theory and Applications of Categories 4 (1998) 47-72

Rapports de recherche SDAD

– 1999 –

99-1 S. Louboutin, *The class number one problem for the dihedral and dicyclic CM-fields.*

99-2 Y. Lefeuvre & S. Louboutin, *The class number one problem for the dihedral CM-fields.*

99-3 S. Louboutin, Y.-H Park & Y. Lefeuvre, *Construction of the real dihedral number fields of degree $2p$. Applications.*

99-4 B. Leclerc, *Decomposition numbers and canonical bases.*

99-5 G. Grätzer & F. Wehrung, *The strong independence theorem for automorphism groups and congruence lattices of arbitrary lattices.*

99-6 G. Grätzer & F. Wehrung, *On the number of join-irreducibles in a congruence representation of a finite distributive lattice.*

99-7 G. Grätzer, H. Lakser & F. Wehrung, *Congruence amalgamation of lattices.*

99-8 B. Leclerc et J.Y. Thibon, *Représentations induites d'algèbres de Hecke affines et singularités de R-matrices.*

99-9 T. Kepka & P. Němec, *Selfdistributive groupoids.*

99-10 P. Dehornoy, *The fine structure of LD-equivalence.*

99-11 G. Basset, *Quasi-commuting extensions of groups.*

99-12 M. Picantin, *The conjugacy problem of small Gaussian groups.*

99-13 B. Lichtin, *On a question of Heath-Brown.*

99-14 V. Girardin & A. Ricordeau, *Analysis of information into margins : a log-linear parametric approach.*

99-15 P. Dehornoy, *The geometry monoid of left self-distributivity.*

99-16 S. Louboutin, *Sur le calcul numérique des constantes des équations fonctionnelles des fonctions L associées aux caractères impairs.*

99-17 P. Dehornoy, *The group of self-distributivity is orderable.*

99-18 S. Louboutin, *Explicit bounds for residues of Dedekind zeta functions and relative class numbers.*

99-19 F. Wehrung, *Representation of algebraic distributive lattices with $\aleph_1$ compact elements as ideal lattices of regular rings.*

99-20 R. Malgouyres & M. More, *On the Computational Complexity of Basic Problems of 2D Digital Topology.*

99-21 J. Cougnard, *Construction de base normale pour les extensions modérément ramifiées des rationnels à groupe D_4.*

99-22 A. Lascoux, B. Leclerc & J.-Y. Thibon, *The plactic monoid (chapitre 6 de "Lothaire II, Combinatorics of words").*

99-23 C. Lecouvey, *Schensted-Type correspondence, Plactic Monoid and Jeu de Taquin for type C_n.*

99-24 N. Creignou, S. Khanna & M. Sudan, *Complexity Classifications of Boolean Constraint Satisfaction Problems.*

99-25 P. Ageron, *Limites inductives point par point dans les catégories accessibles.*

99-26 J. Ježek & T. Kepka, *Selfdistributive groupoids. Part D1 : left distributive semigroups.*

99-27 F. Wehrung, *Forcing extensions of partial lattices.*

99-28 J. Tůma & F. Wehrung, *Unsolvable one-dimensional lifting problems for congruence lattices of lattices.*

99-29 J. Ngatchou Wandji, *Weak convergence of some marked empirical processes. Application to testing heteroskedasticity.*

99-30 M. Kuwata, *Elliptic $K3$ surfaces with given Mordell-Weil rank.*

– 2000 –

00-1 V. Girardin, *Relative entropy, constraints on spectral densities and ARMA models definition.*

00-2 O. Foda, B. Leclerc, M. Okado & J.Y. Thibon, *Ribbon tableaux and q-analogues of fusion rules in WZW conformal field theories.*

00-3 P. Dehornoy, *Study of an identity.*

00-4 R. Choulet, *Des résultats d'irrationalité pour deux fonctions particulières.*

00-5 R. Choulet, *Résultats d'indépendance pour la fonction de Tschakaloff et pour un analogue de l'exponentielle.*

00-6 I. Hardy, Y. Hellegouarch et R. Paysant-Le Roux, *Fractions continues normales dans un corps de fonctions hyperelliptiques.*

00-7 P. Casevitz, *The complexity of subdifferentiation and its inverse on convex functions in Banach spaces.*

00-8 C. Moreira dos Santos, *Decomposition of strongly separative monoids.*

00-9 T. Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs.*

00-10 M. Picantin, *The center of small Gaussian groups.*

00-11 P. Dehornoy, *Petits groupes gaussiens.*

00-12 B. Anglès, *Norm Residue Symbol and the First Case of Fermat's Equation.*

00-13 S. Samborski, *Extensions of Nonlinear Partial Differential Expressions and Viscosity Solutions. One Useful Space.*

00-14 P. Ageron, *Esquisses inductives et presque inductives.*

00-15 P. Ageron, *L'art de l'esquisse (1) : esquisse de nombre réel.*