CATÉGORIES TENSORIELLES

P. Deligne

Abstract. We give an analogue, in super mathematics, to the theorem that over an algebraically closed field of characteristic zero, categories of representations of affine group schemes, with their associative, commutative and unital tensor product, are characterized by the property that for any object, large enough exterior powers vanish.

Key words and phrases. tensor category, Tannaka duality, fiber functor, super group.

0. Introduction.

0.1. Fixons un corps algébriquement clos k de caractéristique 0. Nous appellerons *catégorie k-tensorielle* un système ($\mathcal{A}$, $\otimes$, données auxilaires) du type suivant.

(0.1.0) $\mathcal{A}$ est une catégorie essentiellement petite (équivalente à une petite catégorie);

(0.1.1) elle est abélienne k-linéaire;

(0.1.2) le produit tensoriel $\otimes$ est un foncteur de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ exact et k-linéaire en chaque variable;

(0.1.3) il est muni de contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité (l'unité sera notée 1);

(0.1.4) $(\mathcal{A}, \otimes)$ est *rigide*: tout objet X de $\mathcal{A}$ est *dualisable*, au sens qu'il existe $X^\vee$, le *dual* de X, muni de δ: $1 \to X \otimes X^\vee$ et ev: $X^\vee \otimes X \to 1$, tels que les morphismes composés déduits de δ et ev:

$$X \to X \otimes X^\vee \otimes X \to X \quad \text{et} \quad X^\vee \to X^\vee \otimes X \otimes X^\vee \to X^\vee$$

soient l'identité;

(0.1.5) on a $k \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(1)$.

Une catégorie k-tensorielle sera dite de $\otimes$-*génération finie* si elle admet un $\otimes$-*générateur*: un objet X dont tout objet se déduise par application itérée d'opérations de somme directe, produit tensoriel, dual, passage à un sous-objet ou à un objet quotient.

0.2 Exemple. La catégorie $\mathrm{Rep}(G)$ des représentations linéaires de dimension finie d'un schéma en groupes affine G sur k est k-tensorielle. Elle est de $\otimes$-génération finie si et seulement si G est de type fini sur k, i.e. un groupe algébrique linéaire.

D'après Saavedra (1972), la catégorie k-tensorielle $\mathrm{Rep}(G)$ détermine G, à un isomorphisme unique à automorphisme intérieur près. La notion de catégorie k-tensorielle peut ainsi être regardée comme une généralisation de celle de schéma en groupes affine. Question vague: comment ramener la classification des catégories k-tensorielles à celle d'objets plus concrets?

0.3. Rappelons que, remplaçant systématiquement les anneaux commutatifs par les anneaux $\mathbb{Z}/2$-graduées commutatifs au sens graduée ($xy = (-1)^{\deg(x)\deg(y)}yx$ pour x et y homogènes), on peut, paraphrasant une partie de la géométrie algébrique, obtenir la "super géométrie algébrique". Si on travaille sur k, il s'agit au fond de remplacer la catégorie à produit tensoriel des espaces vectoriels sur k par celle des super espaces vectoriels: les espaces vectoriels $\mathbb{Z}/2$-gradué, la commutativité du produit tensoriel étant donnée par la règle de Koszul.

En super géométrie algébrique sur k, le groupe $\mu_2 = \{\pm 1\}$ agit sur chaque objet; sur un super espace vectoriel, -1 agit par *l'automorphisme de parité* $x \mapsto (-1)^{\deg(x)}x$ pour x homogène.

L'analogue super de 0.2 est le suivant. Soit G un super schéma en groupes affine sur k. C'est le spectre d'une super algèbre de Hopf commutative $\mathcal{O}(G)$, l'algèbre affine de G. Soit ε un élément de $G(k)$ d'ordre divisant 2 et tel que l'automorphisme $\mathrm{int}(\varepsilon)$ de G soit l'automorphisme de parité. Soit $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$ la catégorie des super répresentations de dimension finie (V, ρ) de G, telles que $\rho(\varepsilon)$ soit l'automorphisme de parité de V. C'est une catégorie k-tensorielle et elle est de $\otimes$-génération finie si et seulement si G est de type fini sur k.

0.4 Exemples. (i) Si $\mathcal{O}(G)$ est purement pair, i.e. si G est un schéma en groupes affine vu comme super schéma en groupes, ε est central. La catégorie k-tensorielle $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$ s'identifie à $\mathrm{Rep}(G)$, avec une nouvelle contrainte de commutativité: pour chaque représentation (V, ρ) de G, l'involution $\rho(\varepsilon)$ définit une $\mathbb{Z}/2$-graduation de V et l'isomorphisme de commutativité du produit tensoriel est donné par la règle de Koszul.

Pour ε trivial, on retrouve la catégorie k-tensorielle $\mathrm{Rep}(G)$ de 0.2.

(ii) Soit H un super schéma en groupes affine, et faisons agir μ_2 sur H par l'action de parité. La catégorie k-tensorielle $\mathrm{Rep}(\mu_2 \ltimes G, (-1, e))$ est la catégorie des super représentations de H.

Notre résultat principal est une caractérisation interne de quand une catégorie k-tensorielle de $\otimes$-génération finie est de la forme $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$ — plus précisément, est $\otimes$-équivalente à une telle catégorie.

Proposition 0.5. (i) *Soit X un objet d'une catégorie k-tensorielle $\mathcal{A}$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Il existe un foncteur de Schur (1.4) qui annule X.*

(b) *Les puissances tensorielles de X sont de longueur finie et il existe N tel que pour tout $n \geq 0$ on ait*

$$\text{longueur } (X^{\otimes n}) \leq N^n$$

(ii) *L'ensemble des objets de $\mathcal{A}$ vérifiant (a) est stable par sommes directes, produits tensoriels, passage au dual, extensions et sous-quotients.*

Théorème 0.6. *Pour qu'une catégorie k-tensorielle de $\otimes$-génération finie soit de la forme $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$, il faut et il suffit que ses objets vérifient les conditions équivalentes de 0.5 (i).*

Une réduction assez pénible au cas de $\otimes$-génération finie permet de vérifier que 0.6 reste vrai sans hypothèse de $\otimes$-génération finie. Nous ne l'avons pas rédigée.

Corollaire 0.7. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-tensorielle de $\otimes$-génération finie dont tous les objets sont de longueur finie. Si elle n'a qu'un nombre fini de classes d'isomorphie d'objets simples, elle est de la forme* $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$.

Corollaire 0.8. *Si en outre $\mathcal{A}$ est semi-simple, il existe un groupe fini G et $\varepsilon \in G$, central et d'ordre divisant 2, tels que $\mathcal{A}$ soit $\otimes$-équivalente à* $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$.

Etingof et Gelaki (1998) prouvent un théorème analogue pour les algèbres de Hopf triangulaires semi-simples de dimension finie et leurs catégories de modules.

0.9. Voici le plan de la preuve, et de l'article. Au paragraphe 1, nous prouverons 0.5 (ii) (1.13, 1.18, et 1.19) et que pour tout objet X d'une catégorie k-tensorielle, la condition (b) de 0.5 (i) implique la condition (a) (1.20). Nous prouverons aussi que dans une catégorie $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$ tout objet vérifie ces conditions (a) et (b) (1.21).

Un *super foncteur fibre* de la catégorie k-tensorielle $\mathcal{A}$ sur une super k-algèbre commutative R est un $\otimes$-foncteur k-linéaire exact ω de $\mathcal{A}$ dans la catégorie à produit tensoriel des R-super modules. Ici et dans la suite de l'article, un *$\otimes$-foncteur* est un foncteur F muni d'un isomorphisme $1 \to F(1)$ et d'isomorphismes fonctoriels $F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$ compatibles aux contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité. Un super foncteur fibre sur $R \neq 0$ est automatiquement fidèle: remarquer que si $X \neq 0$, ev: $X^\vee \otimes X \to 1$ est un épimorphisme et que $\omega(X)$ est donc non nul. Sur $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$, le foncteur "super espace vectoriel sous-jacent" est un super foncteur fibre sur k. Réciproquement, d'après Deligne (1990) 8.19, si ω est un super foncteur fibre de la catégorie k-tensorielle $\mathcal{A}$ sur k, que G est le super schéma en groupes de $\otimes$-automorphismes de ω et ε l'automorphisme de parité de ω, alors ω induit une équivalence de $\mathcal{A}$ avec $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$.

On peut montrer que si on part de $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$ et qu'on applique cette construction au foncteur fibre "oubli de l'action de G", on retrouve G et ε: G est le super schéma en groupes des automorphismes du foncteur d'oubli. Nous ne l'avons pas rédigé.

Notre stratégie sera de montrer que si les objets de $\mathcal{A}$ vérifient la condition 0.5 (i) (a), alors $\mathcal{A}$ admet un super foncteur fibre sur k. Au paragraphe 2, nous montrerons que $\mathcal{A}$ admet un super foncteur fibre sur une super k-algèbre $R \neq 0$ convenable. Au paragraphe 3, nous généralisons au cas "super" une partie de la théorie des foncteurs fibre. Pour que les questions de signe restent cachées dans la commutativité du produit tensoriel, il nous sera commode de généraliser davantage, en remplaçant la catégorie k-tensorielle (s-Vect) des super espaces vectoriels de dimension finie par une quelconque catégorie k-tensorielle vérifiant la propriété de finitude (2.1.1). Comme application, nous vérifions au §4 que si $\mathcal{A}$ est de $\otimes$-génération finie et que ω est un super foncteur fibre sur R, il existe une super sous-algèbre R' de R, de type fini sur k, telle que ω provienne par extension des scalaires (3.1) d'un super foncteur fibre ω' sur R'. Parce que k est algébriquement clos, si R et donc R' sont non nuls, il existe un homomorphisme χ: $R' \to k$. Etendant les scalaires par χ, on obtient un super foncteur fibre sur k. Nous concluons le paragraphe 4 par la fin de la preuve de 0.5 et 0.6, et par la preuve de 0.7 et 0.8.

1. Préliminaires.

Proposition 1.1. *Dans une catégorie k-tensorielle dont tous les objets sont de longueur finie, les* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *sont de dimension finie.*

Preuve. Les identités (0.1.4) entre δ et ev équivalent à ce que le foncteur $Y \mapsto Y \otimes X^\vee$ soit adjoint à droite au foncteur $Y \mapsto Y \otimes X$, pour les morphismes d'adjonction $Y \to Y \otimes X \otimes X^\vee$ et $Y \otimes X^\vee \otimes X \to Y$ déduits de δ et ev. En d'autres termes, $\mathcal{H}om(X, Y) := Y \otimes X^\vee$ est un Hom interne: on dispose d'un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Hom}(Z, \mathcal{H}om(X, Y)) = \mathrm{Hom}(Z \otimes X, Y).$$

Pour $Z = 1$, on obtient

$$\mathrm{Hom}(1, \mathcal{H}om(X, Y)) = \mathrm{Hom}(X, Y). \tag{1.1.1}$$

L'objet 1 étant simple (Deligne-Milne 1982, 1.17), il résulte de (0.1.5) et (1.1.1) que n morphismes linéairement indépendants $f_i \colon X \to Y$ définissent un monomorphisme de 1^n dans $\mathcal{H}om(X, Y)$. Si $\mathcal{H}om(X, Y)$ est de longueur finie, sa longueur borne n et $\mathrm{Hom}(X, Y)$ est de dimension finie.

1.2. Nous aurons à utiliser des catégories à produit tensoriel ($\mathcal{A}, \otimes$, données auxilaires) plus générales que celles de 0.1, vérifiant seulement les conditions suivantes.

(1.2.1) $\mathcal{A}$ est additive, k-linéaire et karoubienne: tout endomorphisme idempotent a un noyau. Un endomorphisme idempotent e de X a alors une image, et X se décompose en la somme directe de $\mathrm{Im}(e)$ et de $\mathrm{Ker}(e)$.

(1.2.2) Le produit tensoriel est additif et k-linéaire en chaque variable;

(1.2.3) il est muni de contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité.

1.3. L'hypothèse (1.2.1) permet les constructions suivantes.

Pour X dans $\mathcal{A}$ et V un espace vectoriel de dimension finie sur k, on définit les objets $V \otimes X$ et $\mathcal{H}om(V, X)$ de $\mathcal{A}$ par

$$\mathrm{Hom}(V \otimes X, Y) = \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(X, Y)) \qquad \text{et} \tag{1.3.1}$$

$$\mathrm{Hom}(Y, \mathcal{H}om(V, X)) = \mathrm{Hom}(V \otimes Y, X). \tag{1.3.2}$$

Le choix d'une base $(e_i)_{i \in I}$ de V identifie $V \otimes X$ à la somme d'une famille de copies de X indexées par I, et $\mathcal{H}om(V, X)$ est canoniquement isomorphe à $V^\vee \otimes X$.

Si un groupe fini S agit sur X, l'endomorphisme $e := \frac{1}{|S|} \sum s$ de X est idempotent. Le facteur direct $\mathrm{Im}(e)$ de X, vu comme sous-objet de X, est noté X^S (invariants). Vu comme quotient de X par $\mathrm{Ker}(e)$, il est noté X_S (coinvariants). Si V est une représentation linéaire de S, S agit sur $\mathcal{H}om(V, X)$, et on pose

$$\mathcal{H}om_S(V, X) := \mathcal{H}om(V, X)^S. \tag{1.3.3}$$

Si on choisit un représentant V_λ de chaque classe d'isomorphie de représentations linéaires irréductibles de S, il résulte formellement de ce que $k[S] \xrightarrow{\sim} \Pi\, \mathrm{End}_k(V_\lambda)$ que l'application

$$\bigoplus V_\lambda \otimes \mathcal{H}om_S(V_\lambda, X) \to X \tag{1.3.4}$$

est un isomorphisme.

1.4. Pour $\mathcal{A}$ comme en 1.2 et X un objet de $\mathcal{A}$, le groupe symétrique S_n agit sur la puissance tensorielle $X^{\otimes n}$. Identifions les classes d'isomorphie de représentations irréductibles de S_n aux partitions de n, et pour chaque partition λ choisissons V_λ de classe λ. Le *foncteur de Schur* S_λ est

$$S_\lambda(X) := \mathrm{Hom}_{S_n}(V_\lambda, X^{\otimes n}), \tag{1.4.1}$$

et (1.3.4) se spécialise en

$$\bigoplus V_\lambda \otimes S_\lambda(X) \xrightarrow{\sim} X^{\otimes n} \tag{1.4.2}$$

(somme sur les partitions de n).

Notations: une partition λ est une suite $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ d'entiers $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r > 0$; pour $s > r$, on pose $\lambda_s := 0$; on définit $|\lambda| := \Sigma\lambda_i$ et on dit que λ est une partition de $|\lambda|$. Le *diagramme* $[\lambda]$ de λ est l'ensemble des couples (i, j) d'entiers ≥ 1 tels que $j \leq \lambda_i$. Par exemple, si λ est la partition (3,1) de 4, $[\lambda]$ est

$$\begin{matrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) \\ (2,1) & & \end{matrix} \quad .$$

Noter la disposition matricielle, plutôt que cartésienne, des (i, j). Si au diagramme de λ on applique l'involution $(i, j) \to (j, i)$, on obtient le diagramme de la *partition transposée* λ^t.

Exemples. Pour la partition (n) (resp. $(n)^t = (1^n) = (1, \ldots, 1)$) de n, prenons $V_\lambda = k$, muni de l'action de S_n par le caractère trivial (resp. signe). On a alors $S_{(n)}(X) = \mathrm{Sym}^n(X)$ et $S_{(n)^t}(X) = \overset{n}{\wedge} X$.

1.5. Soient $n_1, \ldots, n_r$ des entiers de somme n et plongeons le produit des S_{n_i} dans S_n en identifiant $\{1, \ldots, n\}$ à la somme disjointe des $\{1, \ldots, n_i\}$. Si, pour chaque i, μ_i est une partition de n_i, le produit tensoriel des V_{μ_i} est une représentation irréductible du produit $\Pi\, S_{n_i}$ des S_{n_i}. Si λ est une partition de n, on note $[\lambda\colon \mu_1, \ldots, \mu_r]$ la multiplicité de cette représentation dans la restriction de V_λ à $\Pi\, S_{n_i}$. Par réciprocité de Frobenius, c'est aussi la multiplicité de V_λ dans l'induite de $\otimes V_{\mu_i}$ à S_n:

$$[\lambda\colon \mu_1, \ldots, \mu_r] = [V_\lambda\colon \otimes V_{\mu_i}] = [\mathrm{Ind}_{\Pi\, S_{n_i}}^{S_n}(\otimes V_{\mu_i})\colon V_\lambda].$$

Ces multiplicités sont données par la règle de Littlewood-Richardson dont nous utiliserons les conséquences suivantes.

(1.5.1) Si $|\lambda| = |\mu| + 1$, on a $[\lambda\colon \mu, (1)] = 1$ si $[\mu] \subset [\lambda]$, 0 sinon. Utilisant la formule

$$[\lambda\colon \mu_1, \mu_2, \mu_3] = \sum_{\lambda'} [\lambda\colon \lambda', \mu_3][\lambda'\colon \mu_1, \mu_2]$$

qui exprime la transitivité de la restriction à un sous-groupe, on en déduit que pour $|\mu| \leq |\lambda|$, les conditions suivantes sont équivalentes: $[\mu] \subset [\lambda]$; il existe une partition ν de $|\lambda| - |\mu|$ telle que $[\lambda\colon \mu, \nu] \neq 0$; $[\lambda\colon \mu, (1), \ldots, (1)] \neq 0$.

(1.5.2) Fixons r et une partition λ de n. Pour qu'il existe $n_1, \ldots, n_r$ de somme n tels que $[\lambda\colon (n_1), \ldots, (n_r)] \neq 0$, il faut et il suffit que $[\lambda]$ ait au plus r lignes.

(1.5.3) Fixons r, s et une partition λ de n. Pour qu'il existe $n_1, \ldots, n_r$, $m_1, \ldots, m_s$ de somme n tels que $[\lambda\colon (n_1), \ldots, (n_r), (m_1)^t, \ldots, (m_s)^t] \neq 0$, il faut et suffit que

$$[\lambda] \subset \{(i,j) \,\big|\, i \leq r \quad \text{ou} \quad j \leq s\},$$

i.e. que $(r+1,\, s+1) \notin [\lambda]$.

Comme classiquement, et avec la même preuve, les foncteurs de Schur obéissent à 1.6, 1.8, 1.11 et 1.15 ci-dessous.

Proposition 1.6. *$S_\mu(X) \otimes S_\nu(X) \sim \oplus\, S_\lambda(X)^{[\lambda\colon \mu, \nu]}$, la somme portant sur les partitions de $n = |\mu| + |\nu|$.*

Preuve. On a

$$S_\mu(X) \otimes S_\nu(X) = \mathcal{H}om_{S_{|\mu|} \times S_{|\nu|}}\left(V_\mu \otimes V_\nu, X^{\otimes |\mu|} \otimes X^{\otimes |\nu|}\right).$$

Par 1.4.2, on a

$$X^{\otimes |\mu|} \otimes X^{\otimes |\nu|} = X^{\otimes n} = \bigoplus_\lambda V_\lambda \otimes S_\lambda(X)$$

et 1.6 en résulte.

Appliquant (1.5.1), on déduit de 1.6 le

Corollaire 1.7. *Si $S_\mu(X)=0$, alors $S_\lambda(X)=0$ pour toute partition λ telle que $[\mu]\subset[\lambda]$.*

La puissance tensorielle $(X\oplus Y)^{\otimes n}$ est la somme sur $p+q=n$ des induites

$$\mathrm{Ind}_{S_p\times S_q}^{S_n}(X^{\otimes p}\otimes Y^{\otimes q}).$$

Il en résulte que:

Proposition 1.8. *Si λ est une partition de n, on a*

$$S_\lambda(X\oplus Y)\sim\bigoplus(S_\mu(X)\otimes S_\nu(Y))^{[\lambda:\,\mu,\nu]}, \tag{1.8.1}$$

la somme portant sur les partitions μ, ν telles que $|\mu|+|\nu|=n$.

Corollaire 1.9. *Dans la catégorie k-tensorielle des super espaces vectoriels de dimension finie, si X est de super dimension $p|q$, i.e. si* $\dim X^0=p$ *et que* $\dim X^1=q$, *pour que $S_\lambda(X)\neq 0$, il faut et il suffit que*

$$[\lambda]\subset\{(i,j)\ \big|\ i\leq p\ \text{ou}\ j\leq q\}. \tag{1.9.1}$$

Preuve. Si Y est purement impair, d'espace vectoriel sous-jacent $|Y|$, l'espace vectoriel sous-jacent à $Y^{\otimes n}$ est $|Y|^{\otimes n}$, et l'action de $\sigma\in S_n$ sur $|Y^{\otimes n}|$ est $\mathrm{sgn}(\sigma)$ fois son action naturelle sur $|Y|^{\otimes n}$. Si ν^t est la partition transposée de la partition ν de n, on a $V_{\nu^t}\sim\mathrm{sgn}\otimes V_\nu$ et

$$|S_\nu(Y)|\sim S_{\nu^t}(|Y|)\quad\text{(pour } Y \text{ impair).} \tag{1.9.2}$$

Décomposons X en ses parties paires et impaires X^0 et X^1. D'après 1.8, et 1.9.2, on a

$$|S_\lambda(X)|=\bigoplus_{|\mu|+|\nu|=|\lambda|}(S_\mu(|X^0|)\otimes S_{\nu^t}(|X^1|))^{[\lambda:\,\mu,\nu]}.$$

Pour que $S_\lambda(X)\neq 0$, il faut et suffit donc qu'il existe des partitions μ et ν telles que $[\mu]$ ait au plus p lignes, $[\nu]$ au plus q colonnes et que $[\lambda:\,\mu,\nu]\neq 0$. Par (1.5.2) (1.5.3), tel est le cas si et seulement si on a (1.9.1).

Corollaire 1.10. *Soient $p,q,r,s,\geq 0$, et λ, μ, ν trois partitions vérifiant $|\lambda|=|\mu|+|\nu|$. Si $(p+r+1,q+s+1)\in[\lambda]$ et que $[\lambda:\,\mu,\nu]\neq 0$, alors $(p+1,q+1)\in[\mu]$ ou $(r+1,s+1)\in[\nu]$.*

Appliquons 1.8, dans la catégorie des super espaces vectoriels, à X de dimension $p|q$ et Y de dimension $r|s$. D'après 1.9, on a $S_\lambda(X\oplus Y)=0$. D'après 1.8 et 1.9, la conclusion exprime la nullité du membre de droite de (1.8.1)

Proposition 1.11. *Pour λ une partition de n, on a*

$$S_\lambda(X \otimes Y) \sim \bigoplus (S_\mu(X) \otimes S_\nu(Y))^{[V_\mu \otimes V_\nu :\, V_\lambda]} \tag{1.11.1}$$

(somme sur μ, ν partitions de n).

Preuve. Utiliser que

$$\begin{aligned}(X \otimes Y)^{\otimes n} = X^{\otimes n} \otimes Y^{\otimes n} &= \Big(\bigoplus V_\mu \otimes S_\mu(X)\Big) \otimes \Big(\bigoplus V_\nu \otimes S_\nu(Y)\Big)\\ &= \bigoplus V_\mu \otimes V_\nu \otimes (S_\mu(X) \otimes S_\nu(Y)).\end{aligned}$$

Corollaire 1.12. *Soient $p, q, r, s, \geq 0$ et λ, μ, ν trois partitions de n. Si $(pq + rs + 1, ps + qr + 1) \in [\lambda]$ et que $[V_\mu \otimes V_\nu :\, V_\lambda] \neq 0$, alors $(p + 1, q + 1) \in [\mu]$ ou $(r + 1, s + 1) \in [\nu]$.*

La preuve est parallèle à celle de 1.10, avec $\oplus$ remplacé par $\otimes$ et 1.8 par 1.11

Corollaire 1.13. *Pour $\mathcal{A}$ comme en 1.2 l'ensemble des objets de $\mathcal{A}$ annulés par au moins un foncteur de Schur est stable par sommes directes et produits tensoriels.*

Preuve. Supposons que $S_\mu(X) = S_\nu(Y) = 0$. Soient $p, q, r, s \geq 0$ tels que $[\mu] \subset [1, p + 1] \times [1, q+1]$ et $[\nu] \subset [1, r+1] \times [1, s+1]$, de sorte que si $(p+1, q+1) \in [\mu']$ (resp. $(r+1, s+1) \in [\nu']$), on ait $[\mu] \subset [\mu']$ (resp. $[\nu] \subset [\nu']$). Si λ est tel que $(p + r + 1, q + s + 1) \in [\lambda]$ (resp. $(pr + qs + 1, ps + qr + 1) \in [\lambda]$), il résulte de 1.7, 1.8 et 1.10 (resp. 1.7, 1.11, et 1.12) que $S_\lambda(X \oplus Y)$ (resp. $S_\lambda(X \otimes Y)$ est nul.

1.14. Si X est dualisable, de dual $X^\vee$, on vérifie comme en 1.1 que le foncteur $Y \mapsto Y \otimes X^\vee$ est adjoint à droite au foncteur $Y \mapsto Y \otimes X$. Les morphismes $1 \to X^\vee \otimes X$ et $X \otimes X^\vee \to 1$ déduits de δ et ev par symmétrie du produit tensoriel font de X un dual de $X^\vee$. Le foncteur $Y \mapsto Y \otimes X^\vee$ est donc aussi adjoint à gauche de $Y \mapsto Y \otimes X$. Si $\mathcal{A}$ est abélienne, le foncteur $Y \mapsto Y \otimes X$ est donc exact, pour avoir des adjoints à gauche et à droite.

1.15. On laisse au lecteur le soin de vérifier que si X et Y sont dualisables, $X \otimes Y$ (resp. $X \oplus Y$) est dualisable, de dual $X^\vee \otimes Y^\vee$ (resp. $X^\vee \oplus Y^\vee$), les morphismes δ et ev étant donné par produit tensoriel (resp. somme directe) de δ et ev pour X et Y.

Un facteur direct A d'un objet dualisable X est encore dualisable. Si $X = A \oplus B$ et que e est l'endomorphisme idempotent "projection sur A" de X, A admet pour dual l'image $A^\vee$ de l'endomorphisme idempotent de $X^\vee$ transposé de e. Si A et $A^\vee$ sont vus comme sous-objets (resp. quotients) de X et $X^\vee$, ev (resp. δ) pour A est déduit de ev (resp. δ) pour X.

Cas particulier 1.15.1. Supposons qu'un groupe fini S agisse sur X dualisable, et faisons agir S sur $X^\vee$ par l'action contragrédiente. Les facteurs directs X_S et $X^\vee_S$ de X et $X^\vee$ sont alors en dualité. Le morphisme $\delta\colon 1 \to X_S \otimes X^\vee_S$ est le composé $1 \to X \otimes X^\vee \to X_S \otimes X^\vee_S$.

Notation 1.16. Si X est dualisable, un endomorphisme f de X correspond par (1.1.1) à un morphisme $\delta(f)\colon 1 \to X \otimes X^\vee$. On définit la trace $\mathrm{Tr}(f) \in \mathrm{End}(1)$ de f comme étant le composé

$$\mathrm{ev} \circ \delta(f)\colon 1 \to X \otimes X^\vee = X^\vee \otimes X \to 1,$$

et $\dim(X) := \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{ev} \circ \delta$.

Un $\otimes$-foncteur transforme objet dualisable en objet dualisable et préserve traces et dimensions.

Nous prouverons par récurrence sur n que

Lemme 1.17. *Si X est dualisable et que $X^{\otimes n} = 0$, alors $X = 0$.*

Preuve. On peut supposer que $n \geq 2$. Tensorisons l'application composée

$$\mathrm{Id}_X\colon X \to X \otimes X^\vee \otimes X \to X$$

par $X^{\otimes n-2}$. On obtient que l'application identique de $X^{\otimes n-1}$ se factorise par $X^{\otimes n} \otimes X^\vee = 0$: on a $X^{\otimes (n-1)} = 0$ et on conclut par récurrence.

Proposition 1.18. *Si X est dualisable, $S_\lambda(X)$ est dualisable, de dual isomorphe à $S_\lambda(X^\vee)$. En particulier, si $S_\lambda(X) = 0$, on a $S_\lambda(X^\vee) = 0$.*

Preuve. Les représentations de S_n étant autoduales, cela résulte de 1.4.2 et de la dualité entre $\mathcal{H}om(V_\lambda, X^{\otimes n})$ et $\mathcal{H}om(V^\vee_\lambda, X^{\vee \otimes n})$.

Proposition 1.19. *Dans une catégorie k-tensorielle, tout objet annulé par au moins un foncteur de Schur est de longueur finie, et l'ensemble de ces objets est stable par sous-quotients et extensions.*

Preuve. Si Y est un sous-objet de X, on a par exactitude du produit tensoriel $Y^{\otimes n} \hookrightarrow X^{\otimes n}$, et pour λ partition de n

$$\mathcal{H}om(V_\lambda, Y^{\otimes n}) \hookrightarrow \mathcal{H}om(V_\lambda, X^{\otimes n}).$$

Par exactitude du foncteur "invariants sous S_n", $S_\lambda(Y)$ est un sous-objet de $S_\lambda(X)$. Dualement, si Y est un quotient de X, $S_\lambda(Y)$ est un quotient de $S_\lambda(X)$. Ceci prouve la stabilité par sous-quotient.

Si X est une extension de X' par X'', l'exactitude du produit tensoriel fournit une filtration S_n-équivariante de $X^{\otimes n}$ de gradué $(X' \oplus X'')^{\otimes n}$. Elle induit une filtration de

$S_\lambda(X)$ de gradué $S_\lambda(X' \oplus X'')$ et la stabilité par extensions résulte de la stabilité par sommes directes 1.13.

Plus généralement, une filtration finie F de X induit une filtration de $S_\lambda(X)$ de gradué $S_\lambda(\mathrm{Gr}_F(X))$. Un produit tensoriel d'objets non nuls est non nul, car "Y non nul" équivaut à "ev: $Y \otimes Y^\vee \to 1$ un épimorphisme", une condition stable par produit tensoriel. Si $\mathrm{Gr}^i_F(X)$ est non nul pour n valeurs de i, $S_\lambda(\mathrm{Gr}_F(X))$ contient le produit tensoriel de ces $\mathrm{Gr}^i_F(X)$, et $S_\lambda(X) \neq 0$. Si $S_\lambda(X) = 0$, X est donc de longueur $< n$.

1.20. Vérifions que dans toute catégorie k-tensorielle, la condition (b) de 0.5 (i) implique (a). Si les $S_\lambda(X)$ sont tous non nuls, (1.4.2) donne

$$\text{longueur } (X^{\otimes n}) \geq \sum_{|\lambda|=n} \dim(V_\lambda) \geq \Big(\sum \dim(V_\lambda)^2\Big)^{1/2} = (n!)^{1/2}$$

et $(n!)^{1/2}$ croît plus vite que toute progression géométrique.

1.21. Les objets d'une catégorie $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$ vérifient les conditions (a) b) de 0.5 (i): (a) résulte de 1.9, et (b) de ce que si la super representation X de G est de super dimension $p|q$, la longueur de $X^{\otimes n}$ est au plus la dimension $(p+q)^n$ l'espace vectoriel sous-jacent.

2. Existence de super foncteurs fibres.

Le résultat clé de l'article est le suivant.

Proposition 2.1. *Si pour tout objet de la catégorie k-tensorielle $\mathcal{A}$ il existe un foncteur de Schur qui l'annule, alors il existe un super foncteur fibre de $\mathcal{A}$ sur une super k-algèbre commutative non nulle.*

Si les hypothèses de 2.1 sont vérifiées, il résulte de 1.19 que

(2.1.1) tout objet de $\mathcal{A}$ est de longueur finie, et d'après 1.1, les $\mathrm{Hom}(X, Y)$ sont donc de dimension finie sur k.

Pour un exemple de catégorie k-tensorielle ne vérifiant pas (2.1.1), voir Deligne (1990) 2.19.

2.2. Soient $\mathcal{A}$ une catégorie k-tensorielle vérifiant (2.1.1) et $\mathrm{Ind}\,\mathcal{A}$ la catégorie de ses Ind-objets. C'est une catégorie abélienne dont $\mathcal{A}$ est sous-catégorie pleine. L'hypothèse (2.1.1) assure que la sous-catégorie $\mathcal{A}$ de $\mathrm{Ind}\,\mathcal{A}$ est stable par sous-quotients et que tout objet de $\mathrm{Ind}\,\mathcal{A}$ est limite inductive filtrante de ses sous-objets dans $\mathcal{A}$.

Modèle: (espaces vectoriel de dimension finie) $\subset$ (espaces vectoriels).

Le produit tensoriel de $\mathcal{A}$ fournit sur $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$ un produit tensoriel défini par

$$(\operatorname{colim} X_i) \otimes (\operatorname{colim} Y_j) = \operatorname{colim}(X_i \otimes Y_j)$$

pour (X_i) et (Y_i) des systèmes inductifs filtrants dans $\mathcal{A}$.

La catégorie $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$, munie de ce produit tensoriel, est comme en 0.1, sauf la petitesse (0.1.0) et l'existence de duaux (0.1.4). Un Ind-objet n'est dualisable que s'il est dans $\mathcal{A}$. En effet, si X est dualisable de dual $X^\vee$, il existe un sous-objet X' de X qui est dans $\mathcal{A}$ et tel que $\delta\colon 1 \to X \otimes X^\vee$ se factorise par $X' \otimes X^\vee$. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Id}_X\colon X & \longrightarrow & X \otimes X^\vee \otimes X & \longrightarrow & X \\
& \searrow & \cup & & \cup \\
& & X' \otimes X^\vee \otimes X & \longrightarrow & X'
\end{array}$$

montre que $X' = X$.

Que $(\operatorname{Ind}\mathcal{A}, \otimes)$ soit comme en 1.2 suffit à définir, dans $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$, les notions d'algèbre associative et commutative à unité (nous dirons simplement "*algèbre*") et de *module* sur une telle algèbre. Un *homomorphisme* d'algèbres $f\colon A \to B$ est supposé transformer l'unité $1 \to A$ de A en celle de B.

2.3. Si A est une algèbre dans $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$, les A-modules forment une catégorie abélienne Mod_A. Munie du produit tensoriel

$$M \otimes_A N := \operatorname{coker}(M \otimes A \otimes N \rightrightarrows M \otimes N),$$

elle est du type considéré en 1.2. L'objet unité 1_A est le A-module A. Le produit tensoriel est exact à droite. Un A-module P est dit *plat* (resp. *fidèlement plat*) si le foncteur $M \mapsto M \otimes_A P$ est exact (resp. exact et fidèle). Pour X dans $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$, le A-module $A \otimes X$ est plat, car $M \otimes_A (A \otimes X) = M \otimes X$. Tout A-module M est quotient d'un A-module plat, par exemple le A-module $A \otimes M$, et on dispose donc du formalisme usuel des foncteurs Tor. En particulier, si une suite exacte $0 \to M \to N \to P \to 0$ avec P plat est tensorisée avec un A-module, elle reste exacte.

Une A-*algèbre* est une algèbre B munie d'un homomorphisme $f\colon A \to B$. Si B est une A-algèbre, et M un B-module, le morphisme produit$\circ(f \otimes M)\colon A \otimes M \to B \otimes M \to M$ fait de M un A-module. Ce foncteur de restriction des scalaires a pour adjoint à gauche le foncteur d'extension des scalaires $M \mapsto M_B := B \otimes_A M$ de Mod_A dans Mod_B. Pour M dans Mod_A et N dans Mod_B, l'isomorphisme $\operatorname{Hom}_B(M_B, N) \to \operatorname{Hom}_A(M, \operatorname{restriction}(N))$ et son inverse sont

$$\begin{array}{lcl}
u\colon M_B \to N & \longmapsto & M \;\; = A \otimes_A M \to B \otimes_A M \xrightarrow{u} N \\
v\colon M \;\to N & \longmapsto & M_B = B \otimes_A M \xrightarrow{v} B \otimes_A N \to N.
\end{array}$$

Le foncteur d'extension des scalaires est un $\otimes$-foncteur.

Cas particulier: l'isomorphisme $1 \otimes 1 \to 1$ fait de 1 une algèbre. Tout objet de $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$ admet une unique structure de module sur cette algèbre à savoir l'isomorphisme $1 \otimes M \to M$. Ceci définit une équivalence $\mathrm{Mod}_1 \sim \operatorname{Ind}\mathcal{A}$. L'unité $1 \to A$ d'une algèbre A est un homomorphisme d'algèbres. Il est soit injectif, soit nul, auquel cas $A = 0$. Le foncteur d'extension des scalaires par $1 \to A$, de $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$ dans Mod_A, est le foncteur exact $M \mapsto A \otimes M$. Il est fidèle si $A \neq 0$.

2.4 Notation. On note Γ le foncteur

$$\Gamma(X) := \mathrm{Hom}(1, X)$$

de $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$ dans les k-espaces vectoriels. Pour A une algèbre de $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$, $\Gamma(A)$ est une k-algèbre (commutative). Par adjonction,

$$\mathrm{Hom}_A(1_A, 1_A) = \mathrm{Hom}(1, A) = \Gamma(A).$$

La dimension (1.16) d'un A-module dualisable est un élément de $\Gamma(A)$.

Definition 2.5. Nous dirons qu'un système d'objets et de morphismes de $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$ a *localement* une propriété si cette propriété devient vraie après extension des scalaires à une algèbre non nulle A convenable.

Par exemple, X est *localement isomorphe* à Y s'il existe une algèbre non nulle A telle que les A-modules X_A et Y_A soient isomorphes. Si $A \neq 0$, k s'injecte dans $\Gamma(A)$. Il résulte donc de 1.16 que deux objets localement isomorphes de $\mathcal{A}$ ont la même dimension.

La terminologie "localement" est inspirée par l'usage de la topologie fpqc (fidèlement plate quasi-compacte) en géométrie algèbrique.

Exemple 2.6. Dans une catégorie k-tensorielle $\mathrm{Rep}(G)$, deux objets ayant la même dimension sont localement isomorphes. En effet, les algèbres de $\operatorname{Ind}\mathrm{Rep}(G)$ s'identifient par $A \mapsto \mathrm{Spec}(A)$ aux schémas affines S sur k munis d'une action de G, et deux représentations X, Y de G sont localement isomorphes si et seulement si leurs images inverses sur S non vide convenable sont des fibrés vectoriels équivariants isomorphes. Si X et Y ont la même dimension n, on peut prendre $S = \mathit{Isom}(X, Y)$, muni de l'action $g(f) = gfg^{-1}$ de G. Le schéma $\mathit{Isom}(X, Y)$ est affine et non vide car isomorphe à $\mathrm{GL}(n)$.

Exemple 2.7. Dans une catégorie k-tensorielle $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$, deux objets X et Y sont localement isomorphes si et seulement si ils ont la même super dimension (1.9).

Lemme 2.8. *Soit M un module dualisable sur une algèbre non nulle A. Pour qu'il existe une A-algèbre non nulle B telle que le B-module 1_B soit un facteur direct de M_B, il faut et il suffit que $\mathrm{Sym}^n_A(M) \neq 0$ pour tout n.*

Preuve. Pour toute A-algèbre B, notons $\mathrm{Fact}(B)$ l'ensemble des paires $\alpha\colon 1_B \to M_B$, $\beta\colon M_B \to 1_B$ telles que $\beta\alpha = 1$, i.e. qui fassent de 1_B un facteur direct de M_B. C'est un foncteur covariant en B. Construisons (B_0, α_0, β_0) universel, i.e. qui coreprésente le foncteur Fact.

(a) La donnée de $\beta\colon M_B \to 1_B$ équivaut par adjonction à celle d'un morphisme de A-modules $M \to 1_B = B$: à

$$v\colon M \to B$$

correspond le composé

$$\text{produit} \circ (B \otimes u)\colon B \otimes M \to B \otimes B \to B.$$

La donnée de v équivaut à son tour à celle d'un morphisme de A-algèbres

$$v_{\mathrm{alg}}\colon \mathrm{Sym}_A(M) = \bigoplus \mathrm{Sym}^n_A(M) \to B$$

(b) La donnée de $\alpha\colon 1_B \to M_B$ équivaut à celle d'un morphisme de A-modules $A \to B \otimes M$, puis à celle de $u\colon M^\vee \to B$: à

$$u\colon M^\vee \to B$$

correspond le composé

$$(u \otimes M) \circ \delta\colon 1_A \xrightarrow{\delta} M \otimes M^\vee = M^\vee \otimes M \to B \otimes M.$$

A son tour, u correspond à un morphisme de A-algèbres

$$u_{\mathrm{alg}}\colon \mathrm{Sym}_A(M^\vee) \to B.$$

(c) Soient α et β, donnant lieu à u et v. Pour que $\beta\alpha\colon 1_B \to M_B \to 1_B$ soit l'identité, il faut et il suffit que sa restriction à 1_A soit le morphisme naturel $1_A \to 1_B$. Cette restriction est le composé

$$1_A \xrightarrow{\delta} M \otimes M^\vee = M^\vee \otimes M \xrightarrow{u} B \otimes M \xrightarrow{v} B \otimes B \to B,$$

i.e. s'obtient en appliquant à δ le produit $u.v$ de u et $v\colon M \otimes M^\vee \to B \otimes B \to B$.

Au total, la donnée sur B de α, β faisant de 1_B un facteur direct de M_B équivaut à celle d'un homomorphisme

$$\mathrm{Sym}_A(M) \otimes_A \mathrm{Sym}_A(M^\vee) = \bigoplus \mathrm{Sym}^p_A(M) \otimes \mathrm{Sym}^q_A(M) \to B$$

tel que l'unité $1_A \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sym}^0_A(M) \otimes \mathrm{Sym}^0_A(M^\vee)$ et $\delta\colon 1_A \to M \otimes_A M^\vee$ aient la même image.

Pour x un morphisme de A-modules de 1_A dans une A-algèbre C, l'idéal (x) *engendré* par x est l'image de la multiplication par x:

$$C = 1_A \otimes_A C \xrightarrow{x} C \otimes_A C \to C.$$

Le quotient $A/(x)$ est le quotient universel de l'algèbre A dans lequel x s'annule. Avec cette terminologie, le (B_0, α_0, β_0) universel que nous cherchons est le quotient de l'algèbre $\mathrm{Sym}_A(M) \otimes \mathrm{Sym}_A(M^\vee)$ par l'idéal $(\delta - 1)$, et M admet localement 1 pour facteur direct si et seulement si $B_0 = 0$, ou, ce qui revient au même, si le morphisme unité $1 \to B_0$ est nul.

La multiplication par δ est un morphisme

$$\mathrm{Sym}^p_A(M) \otimes \mathrm{Sym}^q_A(M^\vee) \to \mathrm{Sym}^{p+1}_A(M) \otimes \mathrm{Sym}^{q+1}_A(M^\vee), \tag{2.8.1}$$

et

$$B_0 = \bigoplus_{a \in \mathbb{Z}} \mathrm{colim}_n \mathrm{Sym}^n_A(M) \otimes \mathrm{Sym}^{n+a}_A(M^\vee),$$

les morphismes de transition dans la limite inductive étant donnés par (2.8.1).

L'unité de B_0 est la limite inductive des morphismes $\delta^n\colon 1 \to \mathrm{Sym}^n_A(M) \otimes_A \mathrm{Sym}^n_A(M^\vee)$. Le foncteur $\mathrm{Hom}(1, \quad)$ commute aux limites inductives filtrantes. Pour que l'unité de B_0 soit nulle, il faut et suffit donc que pour un n on ait $\delta^n = 0$.

L'algèbre symétrique $\mathrm{Sym}_A(M)$ est un quotient de l'algèbre tensorielle (non commutative) $\bigoplus M^{\otimes n}$, et δ^n est l'image de

$$\delta^{\otimes n}\colon 1_A \to M^{\otimes n} \otimes M^{\vee \otimes n}.$$

Ce morphisme est le morphisme δ pour une dualité entre $M^{\otimes n}$ et $(M^\vee)^{\otimes n}$. D'après (1.15.1), δ^n est donc le morphisme δ pour une dualité entre $\mathrm{Sym}^n M$ et $\mathrm{Sym}^n M^\vee$. Il est nul si et seulement $\mathrm{Sym}^n M = 0$.

Proposition 2.9. *Supposons donné dans une catégorie k-tensorielle $\mathcal{A}$ vérifiant (2.1.1) un objet $\bar{1}$ tel que $\bar{1} \otimes \bar{1}$ soit isomorphe à 1 et que l'automorphisme de commutativité du produit tensoriel: $\bar{1} \otimes \bar{1} \to \bar{1} \otimes \bar{1}$ soit la multiplication par -1. Pour X dans $\mathcal{A}$, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Il existe p et q tels que X soit localement isomorphe à $1^p \oplus \bar{1}^q$.*

(ii) *Il existe un foncteur de Schur S_λ tel que $S_\lambda(X) = 0$.*

Pour V un super espace vectoriel de dimension finie, posons $F(V) := V^0 \otimes 1 \oplus V^1 \otimes \bar{1}$. Le choix d'un isomorphisme $\bar{1} \otimes \bar{1} \to 1$ fournit un isomorphisme fonctoriel $F(V) \otimes F(W) \to$

$F(V \otimes W)$ et les hypothèse faites sur $\bar{1}$ assurent que F est une $\otimes$-équivalence de la catégorie k-tensorielle (s-Vect) des super espaces vectoriels de dimension finie avec la sous-catégorie pleine $\langle 1, \bar{1}\rangle$ de $\mathcal{A}$ d'objets les sommes de copies de 1 et $\bar{1}$.

Preuve de (i) $\Rightarrow$ (ii). Si X_A est isomorphe à $(1^p \oplus \bar{1}^q)_A$, $S_\lambda(X)_A$ est isomorphe à $S_\lambda(1^p \oplus \bar{1}^q)_A$. D'après 1.9, il existe λ tel que $S_\lambda(1^p \oplus \bar{1}^q) = 0$. Si $A \neq 0$, que $S_\lambda(X)_A = 0$ implique que $S_\lambda(X) = 0$.

Preuve de (ii) $\Rightarrow$ (i). Supposons qu'après extension des scalaires à une algèbre non nulle A, $1^r \oplus \bar{1}^s$ devienne facteur direct de X:

$$X_A = 1^r_A \oplus \bar{1}^s_A \oplus R.$$

Le A-module R est dualisable car facteur direct du A-module dualisable X_A (1.15). Distinguons trois cas.

a. Tous les $\mathrm{Sym}^n_A(R)$ sont non nuls. D'après 2.8, il existe alors une A-algèbre non nulle B telle que R_B admette 1_B comme facteur direct, d'où une décomposition

$$X_B = 1^{r+1}_B \oplus \bar{1}^s_B \oplus R'.$$

b. Tous les $\mathrm{Sym}^n_A(\bar{1} \otimes R)$ sont non nuls. Puisque $\mathrm{Sym}^n_A(\bar{1} \otimes R) \sim \bar{1}^{\otimes n} \otimes \overset{n}{\wedge}_A R$, ceci équivaut à la non nullité de tous les $\overset{n}{\wedge}_A R$. Sur B non nul convenable, on peut alors extraire un facteur 1_B de $\bar{1} \otimes R_B$, ce qui revient à extraire un facteur $\bar{1}_B$ de R_B, d'où une décomposition

$$X_B = 1^r_B \oplus \bar{1}^{s+1} \oplus R'$$

c. Si ni a. ni b. ne sont d'application, il existe n et m tels que $\mathrm{Sym}^{n+1}_A R = \overset{m+1}{\wedge}_A R = 0$. Soit k un entier $> nm$. D'après 1.7, pour toute partition λ de k, on a $S_\lambda(R) = 0$. Par 1.4.2, on a $R^{\otimes k} = 0$, d'où résulte que $R = 0$ (1.17).

Partant de $A = 1$, $r = s = 0$ et $R = X$ et appliquant itérativement les constructions a. ou b., on obtient que soit X est localement isomorphe à $1^p \oplus \bar{1}^q$ pour p et q convenables, soit X admet localement un facteur direct $1^p \oplus \bar{1}^q$ avec $p + q$ arbitrairement grand. Dans le second cas, contrairement à notre hypothèse, les $S_\lambda(X)$ sont tous non nuls: si λ est une partition de n, on peut choisir p et q tels que $n < (p + 1)(q + 1)$, et $S_\lambda(1^p \oplus \bar{1}^q)$, non nul d'après 1.9, est localement facteur direct de $S_\lambda(X)$ qui est donc non nul.

Rappel 2.10. *Dans une catégorie k-tensorielle vérifiant (2.2.1), tout suite exacte courte est localement scindée.*

C'est Deligne (1990) 7.14. On commence par se réduire au cas des suites exactes courtes de la forme $0 \to X \xrightarrow{a} Y \xrightarrow{b} 1 \to 0$: remplacer une suite exacte courte $0 \to A \to B \to C \to 0$

par la suite exacte courte $0 \to \mathrm{Hom}(C, A) \to E \to 1 \to 0$ correspondante. Ceci fait, la preuve est analogue à celle de 2.8, en plus simple. Si $b^t\colon 1 \hookrightarrow Y$ est le transposé de b, on est ramené à vérifier la non nullité de l'algèbre

$$\mathrm{Sym}(Y)/(b^t - 1) = \operatorname{colim} \mathrm{Sym}^n(Y)$$

(morphismes de transition: la multiplication par b^t).

2.11 Preuve de 2.1. Supposons tout d'abord que $\mathcal{A}$ contienne un objet $\bar{1}$ comme en 2.9. Pour chaque classe d'isomorphie d'objets de $\mathcal{A}$, de représentant X, choisissons une algèbre non nulle B telle que X_B soit isomorphe à une somme de copies de 1_B et $\bar{1}_B$. C'est possible d'après 2.9. Pour chaque classe d'isomorphie de suites exactes courtes dans $\mathcal{A}$, de représentant Σ, choisissons une algèbre non nulle C telle que Σ_C soit scindée. C'est possible d'après 2.10. Soit A le produit tensoriel de toutes ces algèbres: la limite inductive des produits tensoriels d'un nombre fini d'entre elles. L'algèbre A est non nulle et, après extension des scalaires à A, tout objet de $\mathcal{A}$ devient isomorphe à une somme de copies de 1_A et $\bar{1}_A$ et toute suite exacte de $\mathcal{A}$ devient scindée.

Identifions comme en 2.9 la catégorie k-tensorielle (s-Vect) à la sous-catégorie $\langle 1, \bar{1}\rangle$ de $\mathcal{A}$, et identifions $\mathrm{Ind}\,\langle 1, \bar{1}\rangle \subset \mathrm{Ind}\,\mathcal{A}$ à la catégorie de tous les super espaces vectoriels. Pour M dans $\mathrm{Ind}\,\mathcal{A}$, notons $\rho(M)$ le plus grand sous-objet de M dans $\mathrm{Ind}\,\langle 1, \bar{1}\rangle$. Il s'identifie au super espace vectoriel de parties paires et impaires $\mathrm{Hom}(1, M)$ et $\mathrm{Hom}(\bar{1}, M)$.

La multiplication $A \otimes A \to A$ induit sur $\rho(A)$ une structure d'algèbre, i.e. fait de $\rho(A)$ une k-super algèbre. Pour M un A-modules, la multiplication $A \otimes M \to M$ induit de même un morphisme $\rho(A) \otimes \rho(M) \to \rho(M)$ qui fait de $\rho(M)$ un $\rho(A)$-module. Pour M et N deux A-modules, prenant les conoyaux des doubles flèches dans

$$\begin{array}{ccc} \rho(M) \otimes \rho(A) \otimes \rho(N) & \rightrightarrows & \rho(M) \otimes \rho(N) \\ \downarrow & & \downarrow \\ M \otimes A \otimes N & \rightrightarrows & M \otimes N \end{array},$$

on obtient un morphisme de $\rho(M) \otimes_{\rho(A)} \rho(N)$ dans $M \otimes_A N$. Il induit un morphisme

$$\rho(M) \otimes_{\rho(A)} \rho(N) \to \rho(M \otimes_A N). \tag{2.11.1}$$

Si M est de la forme $A \otimes M_0$, avec M_0 dans $\langle 1, \bar{1}\rangle$, on a

$$\rho(A) \otimes M_0 \xrightarrow{\sim} \rho(M). \tag{2.11.2}$$

Si en outre N est de la forme $A \otimes N_0$, avec N_0 dans $\langle 1, \bar{1}\rangle$, on a $M \otimes_A N = A \otimes (M_0 \otimes N_0)$ et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\rho(A) \otimes M_0) \otimes_{\rho(A)} (\rho(A) \otimes N_0) & \xrightarrow{\sim} & \rho(A) \otimes (M_0 \otimes N_0) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \rho(M) \otimes_{\rho(A)} \rho(N) & \longrightarrow & \rho(M \otimes_A N) \end{array}$$

montre que (2.11.1) est un isomorphisme.

Posons $R := \rho(A)$ et pour X dans $\mathcal{A}$ soit $\omega(X)$ le R-module $\rho(X_A)$. Par construction de A, chaque X_A est de la forme $A \otimes M_0$ avec M_0 dans $\langle 1, \bar{1} \rangle$. Le morphisme (2.11.1):

$$\rho(X) \otimes_R \rho(Y) \to \rho(X \otimes Y)$$

est donc un isomorphisme. Pour toute suite exacte courte Σ de $\mathcal{A}$ la suite Σ_A est scindée. La suite $\omega\,(\Sigma)$ l'est donc aussi et en particulier elle est exacte. Le foncteur ω est le super foncteur fibre promis.

Passons au cas général. Soit $\mathcal{A}_1$ la catégorie k-tensorielle des objets $\mathbb{Z}/2$-gradués de $\mathcal{A}$, la contrainte de commutativité $X \otimes Y \to Y \otimes X$ étant, pour X et Y homogènes de degré n et m, celle de $\mathcal{A}$ multipliée par $(-1)^{nm}$. Par 0.5 (ii), la catégorie k-tensorielle $\mathcal{A}_1$ vérifie encore les hypothèses de 2.1. L'objet 1 en degré impair est un objet $\bar{1}$ comme en 2.9. La catégorie $\mathcal{A}_1$ admet donc un super foncteur fibre du type voulu. Il ne reste qu'à prendre sa restriction à $\mathcal{A}$, identifié à la sous-catégorie des objets pairs de $\mathcal{A}_1$.

3. Formalisme des super foncteurs fibre.

3.1. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{T}$ deux catégories k-tensorielles vérifiant (2.1.1): leurs objets sont de longueur finie. Soit R une algèbre de $\operatorname{Ind}\mathcal{T}$. Rappelons que nos algèbres sont supposées commutatives à unité (2.2). Un *foncteur fibre* ω de $\mathcal{A}$ sur R est un $\otimes$-foncteur exact de $\mathcal{A}$ dans la catégorie à produit tensoriel $\operatorname{Mod} R$ des R-modules. Pour $\mathcal{T}$ =(s-Vect) (0.9), on retrouve les super foncteurs fibres de 0.9.

D'après 1.16, les $\omega(A)$ sont des R-modules dualisables. D'après 1.14, ils sont donc plats (2.3) et pour toute R-algèbre R', le $\otimes$-foncteur $A \mapsto \omega'(A) := \omega(A) \otimes_R R'$ est exact (cf. 2.3): c'est un foncteur fibre sur R'.

Un *morphisme* $f\colon F' \to F''$ de $\otimes$-foncteurs est un morphisme de foncteurs rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} F'(X) \otimes F'(Y) & \longrightarrow & F''(X) \otimes F''(Y) \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ F'(X \otimes Y) & \longrightarrow & F''(X \otimes Y) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} 1 & = & 1 \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ F'(1) & \longrightarrow & F''(1) \end{array} \quad .$$

Lemme 3.2. *Tout morphisme de $\otimes$-functeurs entre foncteurs fibre sur R est un isomorphisme.*

Preuve. Si $f\colon \omega' \to \omega''$ est un morphisme, $f_X\colon \omega'(X) \to \omega''(X)$ et $f_{X^\vee}\colon \omega'(X^\vee) \to \omega''(X^\vee)$ sont contragrédients et on applique Deligne (1990) 2.4.

Pour ω un foncteur fibre de $\mathcal{A}$ sur R, nous continuerons à noter ω l'extension de ω à $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$ qui commute aux limites inductives. C'est encore un $\otimes$-foncteur.

Lemma 3.3. *Quel que soit X dans* $\operatorname{Ind}\mathcal{A}$, $\omega(X)$ *est plat, et fidèlement plat (2.3) si* $X \neq 0$.

Preuve. Le module $\omega(X)$ est plat comme limite inductive filtrante de modules dualisables et donc plats. Si $X \neq 0$, X admet un sous-objet non nul A dans $\mathcal{A}$. Puisque $\omega(X/A)$ est plat, la suite exacte $0 \to \omega(A) \to \omega(X) \to \omega(X/A) \to 0$ montre que la fidèle platitude de X résulte de celle de A. Puisque $A \neq 0$, ev: $A^\vee \otimes A \to 1$ est un épimorphisme et si $\omega(A) \otimes_R M = 0$, M est nul en tant que quotient de $\omega(A^\vee) \otimes_R \omega(A) \otimes_R M = \omega(A^\vee \otimes A) \otimes_R M$.

3.4. Pour α et β deux foncteurs d'une catégorie $\mathcal{C}$ dans la catégorie des R-modules dualisables, soit $\Lambda(\alpha, \beta)$ la cofin du bifoncteur contravariant en X et covariant en Y suivant: $X, Y \mapsto \alpha(X)^\vee \otimes_R \beta(Y)$. Par définition de "cofin", on dispose de morphismes

$$\alpha(X)^\vee \otimes_R \beta(X) \to \Lambda(\alpha, \beta), \tag{3.4.1}$$

pour f un morphisme de X dans Y le diagramme

$$\begin{tikzcd} \alpha(Y)^\vee \otimes \beta(X) \arrow[r] \arrow[d] & \alpha(Y)^\vee \otimes \beta(Y) \arrow[d] \\ \alpha(X)^\vee \otimes \beta(X) \arrow[r] & \Lambda(\alpha, \beta) \end{tikzcd} \tag{3.4.2}$$

est commutatif et $\Lambda(\alpha, \beta)$ est universel pour ces propriétés. La donnée de morphismes (3.4.1) équivaut à celle de morphismes

$$\beta(X) \to \alpha(X) \otimes_R \Lambda(\alpha, \beta) \tag{3.4.3}$$

et la commutativité (3.4.2) équivaut à la fonctorialité en X de (3.4.3).

Pour $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \times \mathcal{C}''$, $\alpha = \alpha' \otimes_R \alpha''$ et $\beta = \beta' \otimes_R \beta''$, on a

$$\Lambda(\alpha' \otimes \alpha'', \beta' \otimes \beta'') = \Lambda(\alpha', \beta') \otimes_R \Lambda(\alpha'', \beta'').$$

Pour T un foncteur $\mathcal{D} \to \mathcal{C}$, on dispose d'un morphisme

$$\Lambda(\alpha \circ T, \beta \circ T) \to \Lambda(\alpha, \beta).$$

En particulier, pour $\mathcal{C}$ munie d'un bifoncteur T: $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et α, β d'isomorphismes fonctoriels

$$\alpha(T(X, Y)) = \alpha(X) \otimes_R \alpha(Y) \tag{3.4.4}$$

et de même pour β, on dispose d'un produit

$$\Lambda(\alpha, \beta) \otimes_R \Lambda(\alpha, \beta) \to \Lambda(\alpha, \beta). \tag{3.4.5}$$

Si T est muni de contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité auxquelles (3.4.4) est compatible, ce produit est associatif, commutatif et à unité.

Lemme 3.5. *Si α et β sont deux foncteurs fibres de $\mathcal{A}$ sur R, le R-module $\Lambda(\alpha, \beta)$ est fidèlement plat.*

Preuve. La catégorie $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}$ de Deligne (1990) 5.1 et 5.13 est k-tensorielle et vérifie encore (2.1.1) (ibid. 5.17). Notons $\otimes_k$ le foncteur structural $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}$. Le foncteur $\alpha(X) \otimes_R \beta(Y)$ est exact en chaque variable, puisque les $\alpha(X)$ et $\beta(Y)$ sont plats. Il définit donc un foncteur exact (ibid. 5.17 (vi)) de $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}$ dans les R-modules, qu'on notera $\alpha \boxtimes_R \beta$, caractérisé par

$$\alpha \boxtimes_R \beta(X \otimes_k Y) = \alpha(X) \otimes_R \beta(Y).$$

Les structures de $\otimes$-foncteur de α et β en fournissent une sur $\alpha \boxtimes_R \beta$, prolongeant l'isomorphisme

$$\begin{aligned}(\alpha \boxtimes_R \beta)(X' \otimes_k Y') \otimes (\alpha \boxtimes_R \beta)(X'' \otimes Y'') &= \alpha(X') \otimes_R \beta(Y') \otimes_R \alpha(A'') \otimes_R \beta(Y'') \\ &= \alpha(X') \otimes_R \alpha(X'') \otimes_R \beta(Y') \otimes_R \beta(Y'') = \alpha(X' \otimes X'') \otimes_R \beta(X' \otimes Y'') \\ &= \alpha \boxtimes_R \beta((X' \otimes X'') \otimes_k (Y' \otimes Y'')) = \alpha \boxtimes_R \beta((X' \otimes_k Y') \otimes (X'' \otimes_k Y'')),\end{aligned}$$

et faisant de $\alpha \boxtimes_R \beta$ un foncteur fibre de $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}$ sur R.

Soient inj_1 et inf_2 les foncteurs $X \mapsto X \otimes_k 1$ et $X \mapsto 1 \otimes_k X$ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}$. Ce sont des foncteurs fibres de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}$, i.e. sur l'algèbre 1 de $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}$. Posons

$$\Lambda_0 := \Lambda(\mathrm{inj}_1, \mathrm{inf}_2). \tag{3.5.1}$$

Ce Λ_0 est universel en ce sens que

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \alpha \boxtimes_R \beta(\Lambda_0),$$

et d'après 3.3 appliqué à $\alpha \boxtimes_R \beta$, 3.5 résulte du

Lemme 3.6. $\Lambda_0 \neq 0$.

Preuve. Soit T le foncteur fibre de $\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$ tel que

$$T(X \otimes_k Y) = X \otimes Y.$$

Si on l'applique à Λ_0, on obtient la cofin $\Lambda(\mathrm{Id}_{\mathcal{A}}, \mathrm{Id}_{\mathcal{A}})$ de bifoncteur $X, Y \mapsto X^\vee \otimes Y$ et les morphismes ev: $X^\vee \otimes X \to 1$ fournissent

$$T\Lambda_0 \to 1. \tag{3.6.1}$$

L'objet 1 de $\mathcal{A}$ fournit un morphisme (3.4.1)

$$1 \to \Lambda_0 \tag{3.6.2}$$

et $(3.6.1) \circ T(\!(3.6.2)\!)$ est l'identité de 1. Que $\Lambda_0 \neq 0$ en résulte.

Remarque 3.7. Les constructions 3.4, appliquées à α et β, font de $\Lambda(\alpha, \beta)$ une R-algèbre. Appliquées à $\mathrm{inj}_1, \mathrm{inj}_2$: $\mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A}$, elle font de $\Lambda_0 := \Lambda(\mathrm{inj}_1, \mathrm{inj}_2)$ une algèbre dans $\mathrm{Ind}(\mathcal{A} \otimes_k \mathcal{A})$. L'isomorphisme

$$\alpha \boxtimes_R \beta(\Lambda_0) \xrightarrow{\sim} \Lambda(\alpha, \beta)$$

est un isomorphisme de R-algèbres.

3.8. La structure de R-algèbre du R-module $\Lambda(\alpha,\beta)$ est caractérisée par la commutativité des diagrammes

$$
\begin{tikzcd}
\beta(X)\otimes\beta(Y) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & (\alpha(X)\otimes\Lambda)\otimes(\alpha(Y)\otimes\Lambda) \arrow[d, equal] \\
 & \alpha(X\otimes Y)\otimes(\Lambda\otimes\Lambda) \arrow[d] \\
\beta(X\otimes Y) \arrow[r] & \alpha(X\otimes Y)\otimes\Lambda
\end{tikzcd}
\quad . \tag{3.8.1}
$$

Si α_Λ et β_Λ sont les foncteurs fibres sur Λ déduits de α et β par extension des scalaires de R à Λ, (3.4.3) définit un morphisme fonctoriel de Λ-modules

$$\varphi\colon \beta_\Lambda(X)\to\alpha_\Lambda(X) \tag{3.8.2}$$

et (3.8.1) exprime que c'est un morphisme de $\otimes$-foncteurs, donc un isomorphisme (3.2).

La R-algèbre Λ et φ sont universels: si Λ_1 est une R-algèbre et $\varphi_1\colon \beta_{\Lambda_1}\to\alpha_{\Lambda_1}$ un morphisme de foncteurs, φ_1 définit un morphisme fonctoriel

$$\beta(X)\to\alpha(X)\otimes_R\Lambda_1,$$

nécessairement déduit de $f\colon \Lambda\to\Lambda_1$, et f est un homomorphisme d'algèbres si et seulement si φ_1 est un morphisme de $\otimes$-foncteurs.

3.9. Passons au langage géométrique de Deligne (1990) 7.5. Point de départ: on définit la catégorie des $\mathcal{T}$-*schémas affines* comme étant la duale de la catégorie des algèbres de $\operatorname{Ind}\mathcal{T}$, on note $\operatorname{Spec}(A)$ le $\mathcal{T}$-schéma affine correspondant à une algèbre A, et on appelle A son *algèbre affine*, on dit *module* sur $\operatorname{Spec}(A)$ pour A-module, *foncteur fibre sur* $\operatorname{Spec}(A)$ pour foncteur fibre sur A, $\operatorname{Spec}(A)$-*schéma* ou schéma sur $\operatorname{Spec}(A)$ pour A-algèbre et *image inverse* (de modules) pour extension des scalaires.

Un *groupoïde* agissant sur un $\mathcal{T}$-schéma $S=\operatorname{Spec}(A)$ est un $\mathcal{T}$-schéma H muni d'applications “source” et “but” $s,b\colon H\to S$ et d'une loi de composition associative $H\times_{s,S,b}H\to H$ admettant unités et inverses. Il revient au même de dire que pour tout $\mathcal{T}$-schéma T, s, b et la loi de composition font de l'ensemble $H(T):=\operatorname{Hom}(T,H)$ des T-points de H un groupoïde agissant sur $S(T)$. Le groupoïde H est dit *transitif* si $(b,s)\colon H\to S\times S$ est fidèlement plat, i.e. si l'algèbre affine de H est fidèlement plate sur celle, $A\otimes A$, de $S\times S$.

Si H est un groupoïde agissant sur S, que $c,d\in S(T)$ et que $h\in H(T)$, on écrira $h\colon c\to d$ pour “h a pour source c et but d”. Si M est un module sur S, la donnée de $\varphi\colon s^*M\to b^*M$ équivaut à la donnée pour tout T et tout $h\colon c\to d$ sur T de $\varphi_h\colon c^*M\to d^*M$, compatible aux changements de base $T'\to T$. Dans ce langage, une *action* de H sur M est un morphisme $\varphi\colon s^*M\to b^*M$, tel que pour $\mathrm{id}(a)\colon a\to a$ l'identité de a, $\varphi_{\mathrm{id}(a)}$ soit l'identité de a^*M, et que pour $c\xrightarrow{f}d\xrightarrow{g}e$ on ait $\varphi_{gf}=\varphi_g\varphi_f$. Il suffit bien sûr de vérifier ces conditions dans le cas universel, sur S et $H\times_S H$ respectivement.

3.10. Traduisons 3.8: le schéma $\mathrm{Spec}(\Lambda(\alpha,\beta))$ sur $S = \mathrm{Spec}(R)$ représente le foncteur qui à un S-schéma T associe l'ensemble des isomorphismes de $\otimes$-foncteurs $\beta_T \to \alpha_T$ entre les images inverses de α et β sur T. Ceci justifie la notation $\mathit{Isom}^{\otimes}_S(\beta,\alpha) := \mathrm{Spec}(\Lambda(\alpha,\beta))$.

Si α (resp. β) est un foncteur fibre sur S (resp. T), α et β fournissent par extension des scalaires des foncteurs fibres $\mathrm{pr}_1^*\alpha$ et $\mathrm{pr}_2^*\beta$ sur $S \times T$. Nous poserons

$$\mathit{Isom}^{\otimes}_{S\times T}(\beta,\alpha) := \mathit{Isom}^{\otimes}_{S\times T}(\mathrm{pr}_2^*\beta, \mathrm{pr}_1^*\alpha) \tag{3.10.1}$$

Pour trois foncteurs fibres α, β, γ sur S, T, U, la composition des isomorphismes fournit un morphisme de $S \times U$-schémas:

$$\mathit{Isom}^{\otimes}_{S\times T}(\beta,\alpha) \times_T \mathit{Isom}^{\otimes}_{T\times U}(\gamma,\beta) \to \mathit{Isom}^{\otimes}_{S\times U}(\gamma,\alpha) \tag{3.10.2}$$

et pour α, γ, δ sur S, T, U, V les morphismes (3.10.2) vérifiant une associativité.

Cas particulier: soit ω un foncteur fibre sur S et faisons $(\alpha, S) = (\beta, T) = (\gamma, U) = (\delta, V) := (\omega, S)$. Le $S \times S$-schéma q: $\mathrm{Isom}^{\otimes}_{S\times S}(\omega,\omega) \to S \times S$, muni de l'application source $s := \mathrm{pr}_2 q$, de l'application but $b := \mathrm{pr}_1 q$ et de la loi de composition (3.10.2) est un groupoïde agissant sur S. Par construction, le morphisme (3.8.2) pour $\alpha = \mathrm{pr}_1^*\omega$ et $\beta = \mathrm{pr}_2^*\omega$

$$\varphi\colon s^*\omega \to b^*\omega$$

est une action du groupoïde $I := \mathit{Isom}^{\otimes}_{S\times S}(\omega,\omega)$ sur les $\omega(X)$, fonctorielle en X et compatible au produit tensoriel. Le groupoïde I est universel pour ces propriétés.

4. Existence de super foncteurs fibres sur k.

Proposition 4.1. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-tensorielle de $\otimes$-génération finie. Si α et β sont deux super foncteurs fibres de $\mathcal{A}$ sur un super schéma S, le super schéma $\mathit{Isom}^{\otimes}_S(\alpha,\beta)$ est de présentation finie sur S.*

Preuve. On peut supposer, et on suppose, que S est affine non vide: $S = \mathrm{Spec}(R)$ avec $R \neq 0$. Soit m un idéal maximal de R et S_0 le spectre du corps $k_0 := R/m$. Par extension des scalaires de S à S_0, on déduit de α (ou β, peu importe) un foncteur fibre γ sur S_0. Si X est un $\otimes$-générateur de $\mathcal{A}$, $\mathit{Isom}^{\otimes}_{S_0}(\gamma,\gamma)$ est un sous-schéma en groupes de $\mathrm{GL}(\gamma(X))$, donc est de type fini sur S_0. Puisque S_0 est noethérien, il est même de présentation finie sur S_0.

Les super schémas $\mathit{Isom}^{\otimes}_{S\times S_0}(\mathrm{pr}_1^*\alpha, \mathrm{pr}_2^*\gamma)$ et $\mathit{Isom}^{\otimes}_{S\times S_0}(\mathrm{pr}_1^*\beta, \mathrm{pr}_2^*\gamma)$ sont fidèlement plats sur $S \times S_0$ (3.5). Soit J leur produit fibré. Il est fidèlement plat sur $S \times S_0$ et donc sur S. Les images inverses sur J de α, β et γ sont isomorphes, et l'image inverse sur J du S-super schéma $\mathit{Isom}^{\otimes}_S(\alpha,\beta)$ est de présentation finie, car isomorphe à l'image inverse sur J du S_0-super schéma de présentation finie $\mathit{Isom}^{\otimes}_{S_0}(\gamma,\gamma)$. Par descente fidèlement plate de la présentation finie (cf. SGA1 VIII 3.4 et 1.10), $Isom_S^{\otimes}(\alpha, \beta)$ est de présentation finie sur S_0.

Remarque 4.2. Soit $\mathcal{T}_0$ le catégorie tensorielle des super espaces vectoriels de dimension finie sur un corps k_0. La preuve de 4.1 fait usage de la propriété suivante de $\mathcal{T}_0$:

(4.2.2) pour X dans $\mathcal{T}_0$, l'algèbre $\mathrm{Sym}\, X$ est noethérienne: pour tout idéal a de $\mathrm{Sym}\, X$, il existe N tel que a soit engendré par sa trace sur $\oplus_{i \leq N} \mathrm{Sym}^i X$.

Cette propriété n'est pas vraie dans toute catégorie k-tensorielle $\mathcal{A}$ vérifiant (2.1.1). Soient en effet Y dans $\mathcal{A}$ et E le $\mathcal{A}$-schéma qui représente le foncteur $T \mapsto \mathrm{End}(Y_T)$. C'est le spectre de l'algèbre $\mathrm{Sym}((\mathcal{E}nd Y)^\vee)$. Soit $\mathcal{A}_1$ la catégorie des objets $\mathbb{Z}/(2)$ graduées de $\mathcal{A}$ considérée à la fin de 2.11. La preuve de 2.9 montre que si Y n'est annulé par aucun foncteur de Schur, alors, dans $\mathcal{A}_1$, Y admet localement pour facteur direct $1^p + \bar{1}^q$, avec $p+q$ arbitrairement grand. Il en résulte que, quel que soit n, Y admet localement un endomorphisme u tel que $\mathrm{Tr}(u^i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n$ et que $\mathrm{Tr}(u^{n+1}) = 1$. Ceci reste vrai sans passer à $\mathcal{A}_1$: pour $A = A^+ + A^-$ une algèbre de $\mathcal{A}_1$, $u\colon Y_A \to Y_A$ provient de $u_0\colon Y \to Y_A$ qui, puisque Y est dans $\mathcal{A}$, se factorise par Y_{A^+}: u provient par extension des scalaires d'un endomorphisme de Y_{A^+}. Soit F le sous-schéma de E défini par les équations $\mathrm{Tr}(u^i) = 0$ $(i \geq 1)$. Nous venons de voir qu'un nombre fini de ces équations ne suffit pas à le définir. L'algèbre $\mathrm{Sym}((\mathcal{E}nd Y)^\vee)$ n'est donc pas noethérienne.

Comme exemple de catégorie k-tensorielle vérifiant (2.1.1) mais non (4.2.2), on peut donc prendre, pour t transcendant, la catégorie $\mathrm{Rep}(\mathrm{GL}_t)$ de Deligne-Milne (1982) 1.27: son générateur naturel n'est annulé par aucun foncteur de Schur.

On déduit de 4.1 par un argument standard de passage à la limite que

Corollaire 4.3. *Soient $\mathcal{A}$ une catégorie k-tensorielle de $\otimes$-génération finie et ω un super foncteur fibre de $\mathcal{A}$ sur la super k-algèbre commutative R, limite inductive filtrante des R_α. Posons $S = \mathrm{Spec}(R)$, $S_\alpha = \mathrm{Spec}(R_\alpha)$. Pour α assez grand, le groupoïde $I := Isom_{S\times S}^{\otimes}(\omega, \omega)$ agissant sur S provient par changement de base d'un groupoïde I_α agissant sur S_α, de présentation finie sur $S_\alpha \times S_\alpha$.*

Puisque I est transitif, l'analogue super de EGA IV (3^e partie) 11.2.6.1 (passage à la limite pour la platitude) montre que pour $\beta \geq \alpha$ convenable, le groupoïde I_β agissant sur S_β déduit de I_α par changement de base est transitif. Ci-dessous, un petit détour nous permettra d'utiliser EGA IV 11.2.6.1 tel quel, sans avoir à le supériser.

Un argument de descente fidèlement plate montre comme en Deligne (1990) 3.5.1 que

Lemme 4.4. *Soit $f\colon S \to T$ un morphisme de super schémas sur k. Si un groupoïde I agissant sur S provient par le changement de base $S \times S \to T \times T$ d'un groupoïde transitif J agissant sur T, le changement de base de T à S induit une équivalence de la catégorie des T-modules munis d'une action de J dans celle de S-modules munis d'une action de I.*

Proposition 4.5. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-tensorielle de $\otimes$-génération finie. Si $\mathcal{A}$ admet un super foncteur fibre ω sur une super k-algèbre commutative $R \neq 0$, alors $\mathcal{A}$ admet un foncteur fibre sur k.*

Preuve. Soit n l'idéal de R engendré par la partie impaire de R. C'est un idéal nilpotent et donc distinct de R si $R \neq 0$. Remplaçant R par R/n et ω par le foncteur fibre déduit de ω par extension des scalaires, on peut supposer, et on suppose, que R est purement pair.

L'algèbre R est la limite inductive filtrante de ses sous-k-algèbres de type fini R_α. Avec les notations de 4.3, le groupoïde I agissant sur $S = \mathrm{Spec}(R)$ provient pour R_α assez grand de I_α agissant sur $S_\alpha = \mathrm{Spec}(R_\alpha)$ et de présentation finie sur $S_\alpha \times S_\alpha$. Pour que I_α soit plat sur $S_\alpha \times S_\alpha$, il faut et il suffit que les composantes paires et impaires $\mathcal{O}(I_\alpha)^+$ et $\mathcal{O}(I_\alpha^-)$ de $\mathcal{O}(I_\alpha)$ soient plates sur $R_\alpha \otimes R_\alpha$. La première est une $R_\alpha \otimes R_\alpha$-algèbre commutative de type fini, la seconde un $\mathcal{O}(I_\alpha)^+$-module de type fini. Pour que I_α soit transitif, il faut et suffit que de plus $\mathcal{O}(I_\alpha)^+$ soit fidèlement plat sur $R_\alpha \otimes R_\alpha$.

D'après EGA IV 11.2.6.1, pour $R_\beta \supset R_\alpha$ convenable, le groupoïde I_β agissant sur $S_\beta = \mathrm{Spec}(R_\beta)$ déduit de I_α par changement de base est transitif. D'après 4.4, le foncteur d'extension des scalaires de R_β à R induit une équivalence de la catégorie des super modules sur S_β munis d'une action de I_β avec celle des super modules sur S munis d'une action de I. Appliquant ceci aux $\omega(X)$, pour X dans $\mathcal{A}$, on obtient que le foncteur fibre ω provient d'un foncteur fibre ω_β sur R_β. Puisque R_β est de type fini sur k et non nul, il existe un homomorphisme χ de R_β dans k et, $\omega_\beta \otimes_{R_\beta,\chi} k$ est un foncteur fibre sur k.

4.6 *Fin de la preuve de* 0.5 *et* 0.6**.**

Si la catégorie k-tensorielle $\mathcal{A}$ vérifie la condition (a) de 0.5 (i), elle admet un super foncteur fibre sur R convenable (2.1), donc sur k (4.5) et d'après Deligne (1990) 8.19 est de la forme $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$.

Il reste à vérifier que les conditions (a) et (b) de 0.5 (i) sont équivalentes, et on sait déjà que (b)$\Rightarrow$(a) (1.20). Si la condition (a) est vérifiée, pour tout objet X de $\mathcal{A}$, la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}$ $\otimes$-engendrée par X vérifie encore (a) et est de $\otimes$-génération finie. Elle admet donc un foncteur fibre ω. Si $\omega(X)$ est de super dimension $p|q$, que ω soit exact et fidèle assure que $X^{\otimes d}$ est de longueur au plus celle, $(p+q)^d$, de $\omega(X^{\otimes d}) = \omega(X)^{\otimes d}$. Ceci vérifie (b).

4.7 *Preuve de* 0.7 *et* 0.8**.** L'assertion 0.7 résulte du

Lemme 4.8. *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-tensorielle dont tous les objets sont de longueur finie. Si $\mathcal{A}$ n'a qu'un nombre fini de classes d'isomorphie d'objets simples, alors pour tout X dans $\mathcal{A}$ il existe N tel que*

$$\text{longueur } (X^{\otimes n}) \leq N^n. \tag{4.8.1}$$

Preuve. Soit $K(\mathcal{A})$ le groupe de Grothendieck de la catégorie abélienne $\mathcal{A}$. Si $(S_i)_{i\in I}$ est un système de representants des classes d'isomorphie d'objets simples, $K(\mathcal{A})$ est le $\mathbb{Z}$-module libre de base les $[S_i]$. Soit $\ell\colon K(\mathcal{A}) \to \mathbb{Z}$ l'application "somme des coordonnées". Pour X dans $\mathcal{A}$, on a

$$\text{longueur } (X) = \ell([X]).$$

Le produit tensoriel de $\mathcal{A}$ fait de $K(\mathcal{A})$ un anneau commutatif, et (4.8.1) se récrit

$$\ell([X]^n) \leq N^n.$$

La matrice de la multiplication par $[X]$ est à coefficients entiers ≥ 0. S'ils sont $\leq a$, on a $\ell([X][Y]) \leq |I| a\, \ell(Y)$ et $\ell([X]^n) \leq (|I|a)^n$.

Preuve de 0.8. Supposons en outre $\mathcal{A}$ semi-simple, et soit ω un foncteur fibre de $\mathcal{A}$ sur k. Soit X la somme des S_i. Tout objet de $\mathcal{A}$ étant un sous-objet d'une somme de copies de X, l'application canonique de $\omega(X) \otimes \omega(X)^\vee$ dans $\Lambda(\omega,\omega)$ est surjective, et $\Lambda(\omega,\omega)$ est donc de dimension finie.

La catégorie k-tensorielle $\mathcal{A}$ est de la forme $\mathrm{Rep}(G,\varepsilon)$ avec $\mathcal{O}(G) = \Lambda(\omega,\omega)$, de dimension finie. Divisons l'algèbre affine $\mathcal{O}(G)$ de G par l'idéal engendré par sa partie impaire. On obtient l'algèbre affine du sous-groupe algébrique G_{red} de G, nécessairement fini.

Soit G^0 la composante connexe de G. Puisque G^0_{red} est trivial, l'algèbre de Lie de G^0 est purement impaire. Elle determine G^0: $\mathcal{O}(G^0)$ est le dual de l'algèbre enveloppante de la super algèbre de Lie commutative $\mathrm{Lie}(G^0)$.

Puisque G^0 est invariant dans G, la restriction à G^0 d'une super représentation semi-simple de G est semi-simple, donc triviale: ω induit une équivalence de $\mathcal{A}$ avec $R(G/G^0,\varepsilon)$.

Bibliographie

P. Deligne, *Catégories tannakiennes,* in: Grothendieck Festschrift, vol. II, p. 111–195, Progress in Math. 87, Birkhauser, 1990.

P. Deligne and J. S. Milne, *Tannakian categories,* in: Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties, p. 101–228, Lecture Notes in Mathematics 900, Springer Verlag, 1982.

P. Etingof and S. Gelaki, *Some properties of finite-dimensional semi-simple Hopf algebras*, Math. Res. Letters **5** (1998), p. 191–197.

N. Saavedra, *Catégories tannakiennes*, Lecture Notes in Mathematics **265**, Springer Verlag, 1972.

EGA: Eléments de géométrie algébrique, par A. Grothendieck avec la collaboration de J. Dieudonné; EGA IV: étude locale des schémas et des morphismes de schémas. La troisième partie est Publ. Math. IHES **28** (1966).

SGA: Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie; SGA1 (1960/61): dirigé par A. Grothendieck. Revêtements étales et groupe fondamental. Springer Lecture Notes **224** (1971).

Institute for Advanced Study, Princeton, NJ 08540, USA

E-mail address: `deligne@math.ias.edu`