Notions d'algèbre différentielle;
application aux groupes de Lie et aux variétés
où opère un groupe de Lie

par Henri CARTAN (Paris)

1. ALGÈBRES GRADUÉES

Soit A une algèbre (associative) sur un anneau commutatif K ayant un élément unité. Une structure graduée est définie par la donnée de sous-espaces vectoriels A^p ($p = 0, 1, \ldots$) tels que l'espace vectoriel A soit somme directe des A^p; un élément de A^p est dit « homogène de degré p ». On suppose de plus que le produit d'un élément de A^p et d'un élément de A^q est un élément de A^{p+q}.

On note $a \longrightarrow \bar{a}$ l'automorphisme de A qui, à un élément $a \in A^p$, associe l'élément $(-1)^p a$.

Un endomorphisme θ de la structure vectorielle de A est dit *de degré r* s'il applique A^p dans A^{p+r} pour chaque p. Parmi les endomorphismes, nous distinguerons les catégories suivantes :

1. On appelle *dérivation* tout endomorphisme θ de A, de degré *pair*, qui, vis-à-vis de la multiplication dans A, jouit de la propriété

$$\theta(ab) = (\theta a)b + a(\theta b) \ . \tag{1}$$

2. On appelle *antidérivation* tout endomorphisme δ de A, de degré *impair*, qui jouit de la propriété

$$\delta(ab) = (\delta a)b + \bar{a}(\delta b) \ . \tag{2}$$

Si en outre δ est de degré $+1$ et si $\delta\delta = 0$, δ s'appelle une *différentielle*; on définit alors, classiquement, l'*algèbre de cohomologie* H(A) de A, relativement à δ. C'est une algèbre graduée.

Une dérivation (resp. antidérivation) est nulle sur l'élément unité de A, s'il existe.

Si δ est une antidérivation, $\delta\delta$ est une dérivation; si δ_1 et

δ_2 sont des antidérivations, $\delta_1\delta_2 + \delta_2\delta_1$ est une dérivation. Définissons le *crochet* $[\theta_1, \theta_2]$ de deux endomorphismes θ_1 et θ_2, comme d'habitude, par la formule

$$[\theta_1, \theta_2] = \theta_1\theta_2 - \theta_2\theta_1 .$$

Alors le crochet de deux dérivations est une dérivation; le crochet d'une dérivation et d'une antidérivation est une antidérivation.

Une dérivation, ou une antidérivation, est déterminée quand elle est connue sur les sous-espaces A^0 et A^1, pourvu que l'algèbre A soit engendrée (au sens multiplicatif) par ses éléments de degré 0 et 1. Dans certains cas, on peut se donner arbitrairement les valeurs d'une dérivation (ou d'une antidérivation) sur A^1, en lui donnant la valeur 0 sur A^0 : par exemple, lorsque A est l'*algèbre extérieure* d'un module M (sur K) dont les éléments sont de degré un [1].

Exemple. — Soit $\mathfrak{a}$ un module sur K, et soit A l'algèbre extérieure du dual $\mathfrak{a}'$ de ce module. Chaque élément x de $\mathfrak{a}$ définit un endomorphisme $i(x)$ de l'algèbre A, de degré -1, appelé « produit intérieur » par x : c'est l'unique *antidérivation*, nulle sur $A^0 = K$, qui, sur $A^1 = \mathfrak{a}'$, est égale au « produit scalaire » définissant la dualité entre $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$:

$$i(x)\cdot x' = \langle x, x' \rangle \quad \text{pour } x \in \mathfrak{a} \text{ et } x' \in A^1 ;$$

on a alors

$$\begin{aligned} & i(x)\cdot(x_1' \wedge x_2' \wedge \cdots \wedge x_p') \\ & \quad = \sum_{1 \leqslant k \leqslant p} (-1)^{k+1} \langle x, x_k' \rangle\, x_1' \wedge \cdots \wedge \widehat{x_k'} \wedge \cdots \wedge x_p' \end{aligned} \qquad (3)$$

(le signe $\wedge$ signifiant que le terme situé au-dessous doit être supprimé). L'opérateur $i(x)$ est de *carré nul* : car $i(x)i(x)$ est une dérivation, évidemment nulle sur A^0 et A^1, donc nulle partout.

Produit tensoriel d'algèbres graduées. — Soient A et B deux algèbres graduées. Sur le produit tensoriel $A \otimes B$ de leurs espaces vectoriels, considérons la loi multiplicative définie par $(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = (-1)^{p'q} (aa') \otimes (bb')$, si b est de degré q et a' de degré p'. Définissons sur $C = A \otimes B$ une structure graduée, en appelant C^r le sous-espace de C, somme directe des $A^p \otimes B^q$ tels que $p + q = r$. Alors C est munie d'une structure d'*algèbre graduée*; cette algèbre graduée s'appelle le produit tensoriel des algèbres graduées A et B.

Le cas le plus intéressant est celui où A et B ont un élément unité, les sous-algèbres A^0 et B^0 étant isomorphes à l'an-

[1] Pour ce qui concerne les algèbres extérieures en général, voir BOURBAKI, *Algèbre*, chap. III.

neau de base K. Dans ce cas, on identifiera toujours A à une sous-algèbre de $A\otimes B$, par l'application biunivoque $a \to a\otimes 1$ de A dans $A\otimes B$ (on note 1 l'élément unité); de même, on identifiera B à une sous-algèbre de $A\otimes B$. En outre, désignons par B^+ la somme directe des B^q pour $q \geqslant 1$; $A\otimes B$ est somme directe de la sous-algèbre $A\otimes B^0$ (identifiée à A) et de l'idéal $A\otimes B^+$. Cette décomposition directe définit un projecteur de $A\otimes B$ sur $A\otimes B^0$, donc une application linéaire de $A\otimes B$ sur A; cette application est compatible avec les structures multiplicatives; nous l'appellerons la *projection canonique* de $A\otimes B$ sur A. Elle identifie A à l'algèbre quotient de $A\otimes B$ par l'idéal $A\otimes B^+$. On définit de même la projection canonique de $A\otimes B$ sur B.

Plaçons-nous toujours dans l'hypothèse où $A^0 = B^0 = K$. Soit donnée une application linéaire θ_1 de A dans $C = A\otimes B$, de degré pair, satisfaisant à la condition (1), et une application linéaire θ_2 de B dans C, de même degré, satisfaisant aussi à (1). Il existe alors une *dérivation* θ de l'algèbre $A\otimes B$, et une seule, qui se réduise à θ_1 sur A et à θ_2 sur B; elle est définie par

$$\theta(a\otimes b) = \theta_1(a)\cdot b + a\cdot\theta_2(b) \tag{4}$$

(le signe $\cdot$ désignant la multiplication dans $A\otimes B$).

De même, étant données une application linéaire δ_1 de A dans C, de degré impair, satisfaisant à (2), et une application linéaire δ_2 de B dans C, de même degré, satisfaisant aussi à (2), il existe une *antidérivation* δ de l'algèbre $A\otimes B$, et une seule, qui se réduise à δ_1 sur A et à δ_2 sur B; elle est définie par

$$\delta(a\otimes b) = \delta_1(a)\cdot b + \bar{a}\cdot\delta_2(b)\,. \tag{5}$$

2. Variétés différentiables

Pour simplifier l'exposition, on se bornera aux variétés indéfiniment différentiables. Les *champs de vecteurs tangents* que l'on considérera seront toujours supposés indéfiniment différentiables; de même, les formes différentielles extérieures, de tous degrés, seront supposées à coefficients indéfiniment différentiables.

Les champs de vecteurs tangents constituent un module T sur l'anneau K des fonctions numériques (indéfiniment différentiables). Le module dual T' est le module des formes différentielles *de degré un*. L'algèbre extérieure $A(T')$ du module T' est l'algèbre des formes différentielles de tous degrés (les fonctions, éléments de K, ne sont autres que les formes différentielles de degré 0). La différentiation extérieure, notée d, est une « différentielle » sur $A(T')$, au sens du § 1. Chaque élément x de T définit, outre le *produit intérieur* $i(x)$ (qui opère sur $A(T')$ et est de degré -1), une « transformation infinitésimale » $\theta(x)$ qui opère aussi bien sur T que sur T′ et $A(T')$; sur $A(T')$, c'est une *dérivation* de degré 0, qui est entièrement caractérisée par les deux conditions suivantes :

$$\theta(x)d = d\theta(x) \quad \text{(c'est-à-dire : } \theta(x) \text{ commute avec } d) \; ; \tag{6}$$

$$\theta(x)\cdot f = i(x)\cdot df \text{ pour toute } \textit{fonction } f \in A^0(T') \; . \tag{7}$$

Si x et y sont deux champs de vecteurs tangents, le champ de vecteurs $\theta(x)\cdot y$ se note $[x, y]$; cette notation se justifie parce que

$$\theta([x, y]) = \theta(x)\theta(y) - \theta(y)\theta(x) \; . \tag{I}$$

En outre, sur l'algèbre différentielle $A(T')$, on a les relations

$$\theta(x)i(y) = i(y)\theta(x) + i([x, y]) \; , \tag{II}$$

$$\theta(x) = i(x)d + di(x) \tag{III}$$

(formule qui, compte tenu de $dd = 0$, entraîne la relation n° 6).

3. Groupes de Lie

Soit G un groupe de Lie connexe. Les champs de vecteurs tangents, invariants par les translations à gauche, forment un *espace vectoriel* $\mathfrak{a}(G)$ sur le corps réel; cet espace est en dualité avec l'espace vectoriel $\mathfrak{a}'(G)$ des formes différentielles de degré un, invariantes à gauche. L'algèbre extérieure $A(G)$ de $\mathfrak{a}'(G)$ est l'algèbre (sur le corps réel) des formes différentielles de tous degrés, invariantes à gauche. Les éléments de degré 0 (fonctions constantes) s'identifient aux scalaires (multiples de l'unité). L'algèbre différentielle $A(G)$ a une algèbre de cohomologie qui, lorsque G est *compact*, s'identifie à l'algèbre de cohomologie (réelle) de l'espace G.

Chaque élément x de $\mathfrak{a}(G)$ définit un groupe à un paramètre d'automorphismes de G, qui ne sont autres que les *translations à droite* par un sous-groupe à un paramètre de G. La transformation infinitésimale $\theta(x)$ de ce groupe opère dans $\mathfrak{a}(G)$; donc $\mathfrak{a}(G)$ est stable pour le crochet $[x, y]$. L'espace $\mathfrak{a}(G)$, muni de la structure définie par ce crochet, est l'*algèbre de Lie* du groupe G. En outre, les $\theta(x)$ opèrent dans $A(G)$, ainsi que les produits intérieurs $i(x)$. Sur l'algèbre différentielle $A(G)$, les opérateurs d, $i(x)$ et $\theta(x)$ satisfont aux relations (I), (II) et (III) du paragraphe précédent.

Ici, on peut expliciter l'opérateur différentiel d de $A(G)$: désignons par $e(x')$ la multiplication (à gauche) par un élément $x' \in A^1(G)$ dans l'algèbre $A(G)$; alors, en prenant dans

$\mathfrak{a}(G)$ et dans son dual $\mathfrak{a}'(G) = A^1(G)$ deux bases duales (x_k) et (x_k'), on a

$$d = \frac{1}{2} \sum_k e\,(x_k')\,\theta\,(x_k)\,. \tag{IV}$$

Cette formule a été donnée par Koszul dans sa thèse [1]. Appliquée aux éléments de degré un de $A(G)$, elle donne les « équations de Maurer-Cartan ».

4. Espace fibré principal

C'est une variété $\mathcal{E}$, que nous supposerons indéfiniment différentiable, et où un groupe de Lie connexe G opère de manière que :

1° L'application $(P, s) \longrightarrow P \cdot s$ de $\mathcal{E} \times G$ dans $\mathcal{E}$ soit indéfiniment différentiable; et $(P \cdot s) \cdot t = P \cdot (st)$ (ce qu'on exprime en disant que G opère « à droite ») ;

2° G soit simplement transitif dans chaque classe d'équivalence (fibre) ;

3° L'espace $\mathcal{B}$ (« espace de base ») quotient de $\mathcal{E}$ par la relation d'équivalence définie par G, soit une variété indéfiniment différentiable;

4° Chaque point de $\mathcal{B}$ possède un voisinage ouvert $\mathfrak{U}$ tel que l'image réciproque de $\mathfrak{U}$ dans $\mathcal{E}$ soit isomorphe (comme variété indéfiniment différentiable) au produit $\mathfrak{U} \times G$, la transformation définie par un élément s de G étant alors $(u, g) \longrightarrow (u, gs)$.

On notera E l'algèbre des formes différentielles (à coefficients indéfiniment différentiables) de l'espace $\mathcal{E}$, munie de sa graduation et de l'opérateur d de différentiation extérieure. Tout vecteur x de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(G)$ définit un *champ de vecteurs tangents* à $\mathcal{E}$: en effet, chaque fibre de $\mathcal{E}$ s'identifie à G, d'une manière bien déterminée à une translation à gauche près du groupe G; donc un champ invariant à gauche, sur G, se transporte sur chaque fibre d'une seule manière. Ainsi, chaque élément x de $\mathfrak{a}(G)$ définit, dans l'algèbre E, un produit intérieur $i(x)$ et une transformation infinitésimale $\theta(x)$; et les relations (I), (II) et (III) du § 2 sont satisfaites.

D'ailleurs la transformation infinitésimale $\theta(x)$ n'est autre que celle du sous-groupe à un paramètre de G (groupe d'opérateurs à droite dans $\mathcal{E}$) défini par l'élément x de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(G)$.

[1] *Bull. Soc. math. de France*, 1950, pp. 65-127; voir formule (3.4), p. 74.

L'algèbre B des formes différentielles de l'espace de base $\mathcal{B}$ s'identifie à une *sous-algèbre* de E, stable pour d, à savoir la sous-algèbre des éléments annulés par tous les opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$ relatifs aux éléments x de $\mathfrak{a}(G)$.

D'une manière générale, soit E une algèbre différentielle graduée où opèrent des antidérivations $i(x)$ (de degré -1 et de carré nul) et des dérivations $\theta(x)$ (de degré 0) correspondant aux éléments x d'une algèbre de Lie $\mathfrak{a}(G)$, de manière à satisfaire à (I), (II) et (III). Nous dirons, pour abréger, que G *opère dans l'algèbre* E. Cela étant, nous appellerons *éléments basiques* de E les éléments annulés par tous les $i(x)$ et les $\theta(x)$; ils forment une sous-algèbre graduée B, *stable pour* d [en vertu de (III)]. On appelle éléments *invariants* de E les éléments annulés par les $\theta(x)$; ils forment une sous-algèbre *stable pour* d, que nous noterons I_E.

Dans certains cas, l'homomorphisme canonique $H(I_E) \to H(E)$ des algèbres de cohomologie de I_E et de E est un *isomorphisme* de la première *sur* la seconde. Il en est ainsi notamment dans les cas suivants : 1) E est de dimension finie, et l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(G)$ est *réductive* (i.e. : composée directe d'une algèbre abélienne et d'une algèbre semi-simple) ; 2) E est l'algèbre des formes différentielles d'un espace fibré principal $\mathcal{E}$ dont le groupe G est *compact*.

On a un homomorphisme canonique $H(B) \to H(I_E)$. Un problème important consiste à chercher des relations plus précises entre les algèbres de cohomologie $H(I_E)$ et $H(B)$; dans le cas 2) ci-dessus, ce sont respectivement les algèbres de cohomologie de l'espace fibré $\mathcal{E}$ et de son espace de base $\mathcal{B}$.

5. Connexion infinitésimale dans un espace fibré principal

Une connexion infinitésimale est définie par la donnée, en chaque point P de l'espace fibré $\mathcal{E}$, d'un *projecteur* φ_P de l'espace tangent à $\mathcal{E}$ au point P, sur le sous-espace des vecteurs tangents à la fibre au point P, de manière que :

1° φ_P soit fonction indéfiniment différentiable du point P;

2° Les projecteurs φ_P relatifs aux points d'une même fibre se transforment les uns dans les autres par les opérations du groupe G.

On peut prouver l'*existence* de telles connexions infinitésimales (1). De plus, la donnée d'une connexion infinitésimale dans $\mathcal{E}$ revient à la donnée d'une application linéaire f du dual $A^1(G)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(G)$, dans le sous-espace E^1

(1) Voir la conférence de Ch. Ehresmann à ce Colloque.

des éléments de degré un de l'algèbre E, application qui satisfasse aux deux conditions suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} i(x)\cdot f(x') = i(x)\cdot x' \\ \text{(scalaire de E, c'est-à-dire fonction constante sur } \mathcal{E}\text{)}, \\ \theta(x)\cdot f(x') = f(\theta(x)\cdot x') \end{array}\right\} \quad (8)$$

pour tout $x \in \mathfrak{a}(G)$ et tout $x' \in A^1(G)$.

Supposons qu'on ait un autre espace fibré principal $\mathcal{E}'$ de même groupe G, et un G-*homomorphisme* de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire une application indéfiniment différentiable de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$, compatible avec les opérations de G dans $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}$). Un tel homomorphisme définit d'une manière évidente l'image réciproque d'une connexion infinitésimale sur $\mathcal{E}$: c'est une connexion infinitésimale sur $\mathcal{E}'$. On vérifie aisément que l'application f' de $A^1(G)$ dans E'^1 définie par cette dernière est composée de l'application f et de l'homomorphisme de E dans E' défini par l'application de l'espace $\mathcal{E}'$ dans l'espace $\mathcal{E}$.

Ce qui précède conduit à la notion abstraite de « connexion algébrique » dans une algèbre différentielle E (avec élément-unité) dans laquelle opère un groupe G (au sens de la fin du § 4) : ce sera une application linéaire de $A^1(G)$ dans E^1 qui satisfasse aux conditions (8).

Soit alors f une telle connexion algébrique. Supposons en outre que l'algèbre E satisfasse à la loi d'anticommutation $vu = (-1)^{pq}uv$ pour u de degré p et v de degré q. Alors on peut prolonger f, d'une seule manière, en un *homomorphisme (multiplicatif) de l'algèbre* A(G) *dans l'algèbre* E, qui transforme l'élément unité de A(G) dans l'élément unité de E. Notons encore f ce prolongement. On a alors, pour tout élément $a \in A(G)$,

$$\left.\begin{array}{l} i(x)\cdot f(a) = f(i(x)\cdot a) \\ \theta(x)\cdot f(a) = f(\theta(x)\cdot a)\,. \end{array}\right\} \quad (8')$$

Autrement dit, f est *compatible* avec les opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$, qui opèrent dans A(G) et dans E.

Mais, si $x' \in A^1(G)$, *on n'a pas*, en général, $d(f(x')) = f(dx')$; autrement dit, f n'est pas compatible avec les différentielles de A(G) et de E. L'application $x' \longrightarrow d(f(x')) - f(dx')$ de $A^1(G)$ dans E^2 est ce qu'on appelle le *tenseur de courbure* de la connexion.

L'élément $d(f(x')) - f(dx')$ n'est pas, en général, un élément basique de E; toutefois il est *annulé par tous les produits intérieurs* $i(x)$. Démonstration :

$$i(x)d\cdot(f(x')) = \theta(x)\cdot f(x') - d\cdot(i(x)\cdot f(x')) = f(\theta(x)\cdot x')$$

d'après (8) et, d'après (8'),

$$i(x) \cdot f(dx') = f(i(x) \cdot dx') = f(\theta(x) \cdot x') - f(di(x) \cdot x')$$
$$= f(\theta(x) \cdot x') .$$

6. L'algèbre de Weil d'une algèbre de Lie

Les considérations précédentes ont conduit André Weil (dans un travail non publié) à associer à l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(G)$ une autre algèbre différentielle, dont $A(G)$ est un quotient, et que nous allons définir maintenant.

Désignons par $S(G)$ l'*algèbre symétrique* du dual $\mathfrak{a}'(G)$ de $\mathfrak{a}(G)$. Si on prend une base (x_k') dans $\mathfrak{a}'(G)$, $S(G)$ s'identifie à l'algèbre des *polynômes* par rapport aux lettres x_k' (commutant deux à deux). $S(G)$ s'identifie aussi canoniquement à l'algèbre des formes multilinéaires *symétriques* sur l'espace vectoriel $\mathfrak{a}(G)$.

On distinguera l'espace $\mathfrak{a}'(G)$ comme sous-espace $A^1(G)$ de $A(G)$, et comme sous-espace $S^1(G)$ de $S(G)$. On a un isomorphisme canonique h de $A^1(G)$ sur $S^1(G)$. On notera souvent $\tilde{x}'$ l'élément $h(x')$, pour $x' \in A^1(G)$.

Si on a une connexion algébrique f de $A^1(G)$ dans une algèbre E comme ci-dessus, et qu'on prolonge f en un homomorphisme de $A(G)$ dans E, on est amené à définir une application linéaire $\tilde{f}$ de $S^1(G)$ dans E^2, en posant

$$\tilde{f}(\tilde{x}') = d(f(x')) - f(dx') .$$

Pour que $\tilde{f}$ conserve les degrés, on convient que les éléments de $S^1(G)$ sont de *degré 2*. Ceci conduit à graduer $S(G)$ en convenant que les éléments de $S^p(G)$ (formes p-linéaires symétriques sur $\mathfrak{a}(G)$) sont de degré $2p$. L'application $\tilde{f}$ se prolonge alors en un homomorphisme multiplicatif, de degré 0, de l'algèbre (commutative) $S(G)$ dans l'algèbre E. On notera encore $\tilde{f}$ l'homomorphisme prolongé.

L'*algèbre de Weil* de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}(G)$ sera, par définition, l'algèbre graduée

$$W(G) = A(G) \otimes S(G) ,$$

produit tensoriel des algèbres graduées $A(G)$ et $S(G)$ (cf. § 1). Les homomorphismes $f : A(G) \longrightarrow E$, et $\tilde{f} : S(G) \longrightarrow E$, définissent un homomorphisme $\bar{f}$ de l'algèbre $W(G)$ dans l'algèbre E, par la formule

$$\bar{f}(a \otimes s) = f(a) \otimes \tilde{f}(s) .$$

L'homomorphisme (multiplicatif) $\bar{f}$ est de degré 0.

On va définir, sur $W(G)$, *d'une manière indépendante de* *l'algèbre* E *et de la connexion* f, des opérateurs $i(x)$, $\theta(x)$ et une différentielle δ, de telle manière que, pour toute connexion f dans une algèbre différentielle graduée E dans laquelle opère G (avec la loi d'anticommutation $vu=(-1)^{pq}uv$), l'homomorphisme $\bar{f}$ défini par f soit *compatible* avec les opérateurs $i(x)$, $\theta(x)$ et les opérateurs différentiels δ (de W(G)) et d (de E).

Définition de $i(x)$: $i(x)$ est déjà défini sous la sous-algèbre A(G) de $W(G)=A(G)\otimes S(G)$. Sur S(G), convenons que l'opérateur $i(x)$ est nul. Sur W(G), $i(x)$ sera l'unique antidérivation qui prolonge $i(x)$ sur A(G) et 0 sur S(G); on a $i(x)i(x)=0$, car $i(x)i(x)$ est une dérivation nulle sur A(G) et sur S(G). Cela posé, on a, pour tout élément $w \in W(G)$,

$$i(x)\cdot\bar{f}(w)=\bar{f}(i(x)\cdot w) \quad \text{(compatibilité de } \bar{f} \text{ avec } i(x)),$$

parce qu'il en est ainsi lorsque w est dans A(G) (relation (8')) et lorsque w est dans $S^1(G)$ (les deux membres étant alors nuls).

Définition de $\theta(x)$: $\theta(x)$ est déjà défini sur A(G). On va le définir sur $S^1(G)$, puis on le prolongera en une dérivation (de degré 0) sur $W(G)=A(G)\otimes S(G)$. Or soit $\tilde{x}'\in S^1(G)$, donc $\tilde{x}'=h(x')$; on pose $\theta(x)\cdot\tilde{x}'=h(\theta(x)\cdot x')$; ceci définit $\theta(x)$ sur $S^1(G)$.

$\theta(x)$ étant alors prolongé à W(G), on a bien, pour tout $w\in W(G)$,

$$\theta(x)\cdot\bar{f}(w)=\bar{f}(\theta(x)\cdot w)$$

(compatibilité de $\bar{f}$ avec $\theta(x)$), parce qu'il en est ainsi lorsque w est dans A(G) (relations (8')), et lorsque w est dans $S^1(G)$; en effet

$$\theta(x)\cdot\tilde{f}(\tilde{x}')=\tilde{f}(\theta(x)\cdot\tilde{x}') \quad \text{(vérification immédiate, grâce à (8'))}.$$

Il y a intérêt à décomposer l'opérateur $\theta(x)$ sur W(G) en la somme de deux opérateurs partiels :

$$\theta(x)=\theta_A(x)+\theta_S(x),$$

où $\theta_A(x)$ est égal à $\theta(x)$ sur A(G) et nul sur S(G), et $\theta_S(x)$ est égal à $\theta(x)$ sur S(G) et nul sur A(G).

Définition de l'opérateur différentiel δ *de* W(G). — La relation

$$d(f(x'))=f(dx')+\tilde{f}(\tilde{x}')$$

conduit à poser (si l'on veut que $\bar{f}$ soit compatible avec les opérateurs différentiels)

$$\delta x'=dx'+\tilde{x}'=dx'+h(x'). \tag{9}$$

De même la relation
$$i(x)d\cdot\tilde{f}(\tilde{x}')=\theta(x)\cdot\tilde{f}(\tilde{x}')=\tilde{f}(\theta(x)\cdot\tilde{x}')$$
conduit à poser
$$i(x)\cdot\delta\tilde{x}'=\theta(x)\cdot\tilde{x}',$$
ou, ce qui revient au même,
$$\delta\tilde{x}'=\sum_k x_k'\otimes\theta(x_k)\cdot\tilde{x}' \tag{10}$$
((x_k) et (x_k') étant deux bases duales).

L'opérateur δ étant ainsi défini sur $A^1(G)$ et $S^1(G)$, il se prolonge d'une seule manière en une antidérivation (notée encore δ) de $W(G)=A(G)\otimes S(G)$. Son degré est $+1$. Les formules (9) et (10) permettent d'ailleurs d'expliciter δ sur $W(G)$ tout entier :
$$\delta=d_A+d_S+h, \tag{11}$$
où h prolonge l'application (déjà notée h) de $A^1(G)$ dans $S^1(G)$ en une antidérivation de $W(G)$, nulle sur $S(G)$:
$$h=\sum_k i(x_k)\,e(\tilde{x}_k') \tag{12}$$
($e(\tilde{x}')$ désigne la multiplication par l'élément $\tilde{x}'\in S^1(G)$).

Quant aux opérateurs d_A et d_S, ils sont explicités par les formules suivantes (dont la première résulte de la formule (IV) du § 3) :
$$d_A=\frac{1}{2}\sum_k e(x_k')\,\theta_A(x_k), \tag{13}$$
$$d_S=\sum_k e(x_k')\,\theta_S(x_k). \tag{14}$$

Les formules (11), (12), (13), (14) explicitent complètement l'opérateur δ de $W(G)$.

La relation analogue à (III) (§ 2) :
$$\theta(x)=i(x)\delta+\delta i(x)$$
a lieu sur $W(G)$. Elle résulte des relations suivantes :
$$i(x)h+hi(x)=0, \tag{15}$$
$$\theta_A(x)=i(x)d_A+d_Ai(x), \tag{16}$$
$$\theta_S(x)=i(x)d_S+d_Si(x). \tag{17}$$

On vérifie que δ est une différentielle : $\delta\delta=0$. Il suffit de vérifier que la dérivation $\delta\delta$ est nulle sur $A^1(G)$ et $S^1(G)$. Ainsi, $W(G)$ est une algèbre différentielle graduée, munie d'opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$ satisfaisant aux conditions (I), (II), (III) du § 2.

Chaque fois qu'on a une connexion algébrique dans une algèbre différentielle graduée E où opère G [avec la loi d'anti-commutation $vu = (-1)^{pq}uv$], on obtient un homomorphisme $\bar{f}$ de l'algèbre de Weil W(G) dans l'algèbre E, compatible avec les graduations, les opérateurs $i(x)$ et $\theta(x)$, et enfin *compatible avec les opérateurs différentiels.* Seuls, ce dernier point reste à vérifier; or la relation

$$\bar{f}(\delta w) = d(\bar{f}(w))$$

a lieu si w est dans $A^1(G)$ ou dans $S^1(G)$, d'après la manière même dont δ a été défini (cf. relations (9) et (10)); il en résulte qu'elle a lieu pour tout $w \in A(G) \otimes S(G)$. C. Q. F. D.

Cas particulier. — Prenons pour E l'algèbre A(G), f étant l'application identique de $A^1(G)$ dans $A^1(G)$. Alors $\bar{f}$ n'est autre que la *projection canonique* (cf. fin du § 1) de $W(G) = A(G) \otimes S(G)$ sur A(G); cette projection canonique est compatible avec les opérateurs différentiels δ (de W(G)) et $d = d_A$ (de A(G)). Donc l'algèbre différentielle A(G) s'identifie à un quotient de l'algèbre différentielle W(G).

Remarque. — Si le groupe G est *abélien*, les opérateurs $\theta(x)$ sont nuls; alors la différentielle δ de W(G) se réduit à l'antidérivation h définie par la formule (12).

7. Classes caractéristiques (réelles) d'un espace fibré principal

Soit $\mathcal{E}$ un espace fibré principal de groupe G, et soit E l'algèbre des formes différentielles de l'espace $\mathcal{E}$. Il existe une *connexion* f, d'où un homomorphisme $\bar{f}$ de l'algèbre de Weil W(G) dans E.

Les éléments basiques de W(G) sont transformés par $\bar{f}$ dans des éléments basiques de E, c'est-à-dire des éléments de l'algèbre B des formes différentielles de l'espace de base $\mathcal{B}$. Or les éléments basiques de W(G) ne sont autres que les éléments *invariants* de S(G). Nous noterons $I_S(G)$ la sous-algèbre de ces éléments invariants; elle s'identifie à l'algèbre des formes multilinéaires symétriques sur $\mathfrak{a}(G)$, invariantes par le groupe adjoint; on n'oubliera pas que les éléments de $I^p_S(G)$ sont de *degré* $2p$. Dans la seconde conférence, nous étudierons la structure de l'algèbre $I_S(G)$.

La formule (14) montre ceci : pour qu'un élément de S(G) soit un *cocycle* de W(G) (c'est-à-dire pour que le δ de cet élément soit nul), il faut et il suffit qu'il soit *invariant.*

Revenant à l'homomorphisme $\bar{f}$, il applique les éléments de $I_S(G)$, qui sont des cocyles de $W(G)$, dans des cocycles de B, c'est-à-dire des *cocycles de l'espace de base*. On les appelle les *cocycles caractéristiques de la connexion*; ils sont de *degrés pairs*. Ils forment une sous-algèbre du centre de B, appelée la sous-algèbre caractéristique de la connexion.

Si on a un G-homomorphisme d'un espace fibré principal $\mathcal{E}'$ (de groupe G) dans l'espace fibré $\mathcal{E}$, et qu'on envisage la connexion f' qu'il définit (image réciproque de la connexion f), l'homomorphisme $\bar{f}'$ de $W(G)$ dans E' est évidemment composé de $\bar{f}$ et de l'homomorphisme de E dans E' (défini par l'application de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$). Donc l'homomorphisme $I_S(G) \longrightarrow B'$ est composé de $I_S(G) \longrightarrow B$ et de l'homomorphisme $B \longrightarrow B'$.

Passons maintenant des cocycles de B à leurs classes de cohomologie, éléments de l'algèbre de cohomologie $H(B)$. La connexion f définit un *homomorphisme de* $I_S(G)$ *dans* $H(B)$, *qui applique* $I^p_S(G)$ *dans* $H^{2p}(B)$. Cet homomorphisme, introduit par A. Weil, joue un rôle fondamental; on verra (2^e conférence) qu'il est *indépendant du choix de la connexion*. C'est donc un *invariant de la structure fibrée* de l'espace $\mathcal{E}$. L'image de $I_S(G)$ par cet homomorphisme est une sous-algèbre de l'algèbre de cohomologie $H(B)$ de l'espace de base, appelée la sous-algèbre caractéristique de la structure fibrée; ses éléments sont les *classes caractéristiques* de la structure fibrée; elles sont de *degrés pairs*.

Si on a un G-homomorphisme d'un espace fibré principal $\mathcal{E}'$, de même groupe G, dans l'espace $\mathcal{E}$, l'homomorphisme $H(B) \longrightarrow H(B')$ qu'il définit applique la sous-algèbre caractéristique de $H(B)$ *sur* la sous-algèbre caractéristique de $H(B')$.

8. L'algèbre de Weil comme algèbre universelle

On sait (1) que si un espace fibré principal $\mathcal{E}$, de groupe G, est tel que ses groupes d'homotopie $\pi_i(\mathcal{E})$ soient nuls pour $0 \leqslant i \leqslant N$ ($\pi_0(\mathcal{E}) = 0$ signifiant que $\mathcal{E}$ est connexe), alors, pour tout espace fibré principal $\mathcal{E}'$, de groupe G, dont la base $\mathcal{B}'$ est un espace de dimension $\leqslant N$, il existe un G-homomorphisme de $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{E}$; d'où un homomorphisme $E \longrightarrow E'$ et un homomorphisme $B \longrightarrow B'$. De plus, deux quelconques de ces G-homomorphismes définissent des applications de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ qui sont *homotopes*, et par suite l'homomorphisme

(1) Voir par exemple Steenrod, *Annals of Math.*, 45, 1944, pp. 294-311, pour le cas où G est le groupe orthogonal.

$H(B) \to H(B')$ est univoquement déterminé par la structure fibrée de $\mathcal{E}'$. Un tel espace $\mathcal{E}$ est dit *classifiant pour la dimension* N.

Par exemple, si G est le groupe orthogonal, on connaît des espaces classifiants pour des dimensions arbitrairement grandes (mais un même espace n'est pas classifiant pour toutes les dimensions). Leurs bases sont des grassmanniennes (réelles).

Revenant à l'algèbre de Weil $W(G)$, on voit qu'elle se comporte, du point de vue homologique, comme une algèbre universelle pour les espaces fibrés de groupe G, c'est-à-dire comme une algèbre de cochaînes d'un espace fibré qui serait classifiant pour tous les espaces fibrés de groupe G, quelle que soit la dimension de leur espace de base. L'algèbre $I_S(G)$ joue le rôle de l'algèbre des cochaînes de l'espace de base d'un tel espace fibré universel, avec la particularité que les éléments de $I_S(G)$ sont tous des cocycles. L'homomorphisme de $W(G)$ dans E', défini par une connexion dans l'algèbre E' des cochaînes de l'espace $\mathcal{E}'$, joue le rôle que jouait l'homomorphisme $E \to E'$ défini par un G-homomorphisme d'un espace classifiant $\mathcal{E}$ dans l'espace $\mathcal{E}'$; l'homomorphisme $I_S(G) \to B'$ joue le rôle que jouait l'homomorphisme $B \to B'$; enfin, l'homomorphisme (unique) $I_S(G) \to H(B')$ joue le rôle que jouait l'homomorphisme (unique) $H(B) \to H(B')$.

En fait, on verra, dans la deuxième conférence (§ 7), que si, G étant *compact* (connexe), l'espace $\mathcal{E}$ est classifiant pour la dimension N, alors $H^m(B)$ est nul pour les *m impairs* $\leqslant N$, et l'homomorphisme canonique $I_S(G) \to H(B)$ applique *biunivoquement* $I^p_S(G)$ *sur* $H^{2p}(B)$ pour $2p \leqslant N$. Ceci donnera une preuve, *a priori*, du fait que les espaces de cohomologie des bases de deux espaces classifiants pour la dimension N sont isomorphes pour tous les degrés $\leqslant N$.