Foncteurs cartésiens et Catégories feuilletées

Jean Bénabou

9 novembre 2012

Résultats très anciens (échantillon)

$\mathbf{S}$ catégorie et $S \in \boldsymbol{Ob}\,(\mathbf{S})$.

Si P: $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{S} \in \boldsymbol{Cat}\,/\,\mathbf{S}$, X_S est la fibre au-dessus de S.

Si F: $(\mathbf{X}, P) \longrightarrow (\mathbf{X'}, P') \in \boldsymbol{Cat}\,/\,\mathbf{S}$, (i.e. $P'\,F = P$) $F_S : \mathbf{X}_S \longrightarrow X'_S$ est le foncteur induit.

On suppose P et P' fibrations et F cartésien, alors:

1. F fidèle $\Leftrightarrow$ tous les F_S le sont.
2. F plein $\Leftrightarrow$ tous les F_S le sont.
3. F essentiellement surjectif $\Leftrightarrow$ tous les F_S le sont.
4. F final $\Leftrightarrow$ tous les F_S le sont.
5. F plat $\Leftrightarrow$ tous les F_S le sont.
6. F a un adjoint à gauche au-dessus de $\mathbf{S}$ $\Leftrightarrow$ tous les F_S ont un adjoint à gauche.
7. F conservatif $\Leftrightarrow$ tous les F_S le sont.

Il en résulte que toutes ces propriétés sont stables par changement de base $\mathbf{S}_1 \longrightarrow \mathbf{S}$, et reflétées par changement de base essentiellement surjectif.

Foncteurs feuilletants

1 er étage

$P : \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{S}$ foncteur. $\boldsymbol{V}(P) = \boldsymbol{V}$ ensemble des flèches v de $\boldsymbol{X}$ telles que $P(v)$ est une identité.

$k : Y \to X \in \boldsymbol{X}$ est *cartésienne* ssi pour toute $f : Z \longrightarrow X$ telle que $P(f) = P(k)$ $\exists !\, v \in \boldsymbol{V}$ avec $f = k\, v$.
On note $\boldsymbol{K}(P) = \boldsymbol{K}$ l'ensemble des flèches cartésiennes.

Déf 1: P est *préfeuilletant* ssi toute $f \in \boldsymbol{X}$ se factorise en $f = k\, v$, $k \in \boldsymbol{K}$ *et* $v \in \boldsymbol{V}$.

Déf 2: Soit P préfeuilletant et $P' : \boldsymbol{X'} \longrightarrow \boldsymbol{S}$ arbitraire et F: $\boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{X'}$ tel que $P'\, F = P$. On dit que F est *cartesien* s'il vérifie les 2 conditions suivantes:

(C_0) F préserve les flèches cartésiennes (i.e. $k \in \boldsymbol{K} \Rightarrow F\, k \in \boldsymbol{K'}$)

(C_1) Si $X \in \boldsymbol{X}$, $Y' \in \boldsymbol{X'}$ et $f' : Y' \longrightarrow F\, X$, il existe $f : Y \longrightarrow X \in \boldsymbol{X}$ et $v' : Y' \longrightarrow F\, Y \in \boldsymbol{V'}$ rendant

commutatif :

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v'"'] & F\,X \\ F\,Y \arrow[ur, "Ff"'] & \end{tikzcd}$$

Lemme fondamental: Soit F cartésien et $X' \in \boldsymbol{X}'_S$. L'inclusion $X' \downarrow F_S \longrightarrow X' \downarrow F$ est pleine et admet un adjoint à droite.

Déf 3: P: $\boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{S}$ est *feuilletant* s'il est préfeuilletant et $\boldsymbol{K}$ est stable par composition.

Théorème : Les assertions 1 à 6 restent vraies si on remplace "P et P' fibrations" par "P préfeuilletant" (P' étant arbitraire). Pour 7 il faut en outre supposer P feuilletant.

La condition (C_1)

Dans la définition de foncteur cartésien, la condition (C_0) est très naturelle, et bien connue pour les fibrations, et même les préfibrations, mais (C_1) reste un peu mystérieuse. Nous allons éclaircir un peu son rôle sur deux exemples, mais elle ne sera tout à fait comprise que bien plus tard.

1. Les préfibrations

Théorème: Soit $P : X \longrightarrow S$ préfeuilletant. Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) P est une préfibration

(ii) Pour tout P': $X' \longrightarrow S$ et F: $X \longrightarrow X'$ tel que $P = P'F$, si F préserve les flèches cartésiennes il est cartésien au sens de notre définition

(iii) P est cartésien (dans notre sens) de (X, S) vers (S, id).

De manière moins formelle $(C_0) \Longrightarrow (C_1)$ caractérise les préfibrations parmi les foncteurs préfeuilletants. Cela explique que (C_1) ne soit jamais apparue dans la littérature qui ne traitait que de préfibrations, voire seulement de fibrations.

2. Les groupes

Soient X, X' et S des groupes, P: $X \longrightarrow S$, P': $X' \longrightarrow S$ et F: $X \longrightarrow X'$, des morphismes de groupes tels que $P = P'F$.
Toutes les flèches sont cartésiennes donc P et P' sont feuilletants et F préserve des flèches cartésiennes. La condition (C_1) est alors : toute $f' \in X'$ s'écrit $f' = F(f)\, v'$ avec $f \in X$ et $v' \in Ker\,(P')$.

Elle équivaut à $Im\,(P) = Im\,(P')$.

Soit F_1: $Ker\,(P) \longrightarrow Ker\,(P')$ le morphisme induit par F.

Les assertions 1 et 2 deviennent: Si $Im\,(P) = Im\,(P')$ alors:

F est une injection (resp. une surjection) si et seulement si F_1 en est une.

Flèches horizontales (et preuve de 7)

Définition Soit $P : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ un foncteur. Une flèche $h : Y \longrightarrow X$ est *horizontale* si pour tout $k : Z \longrightarrow Y$, k cartésienne $\Rightarrow$ $h\,k$ cartésienne.

Je note $\boldsymbol{H}\,(P)$, ou $\boldsymbol{H}$ l'ensemble de ces flèches. $\boldsymbol{H}$ a des quantités de propriétés, surtout quand P est préfeuilletant. Je ne donne ici qu'un petit échantillon

(i) Tout iso est horizontal.

(ii) Toute flèche h horizontale est cartésienne.

(iii) $\boldsymbol{H}$ est stable par composition.

(iv) $\boldsymbol{K}$ stable par composition ssi $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{H}$

(v) Si P est préfeuillant et $F : (\boldsymbol{X}, P) \longrightarrow (\boldsymbol{X'}, P')$ est cartésien, F préserve les flèches horizontales.

Théorème Si P est préfeuilletant et F cartésien h est horizontale ssi : h est hypercartésienne pour F et $\boldsymbol{P}\,(h)$ est horizontale pour P'.

Pour la preuve de 7, on n'utilise que le fait que h horizontale $\Rightarrow$ h hypercartésienne pour F

Foncteurs finaux

Soit $F: \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ un foncteur

On rappelle que F est final ssi pour tout objet X' de $\mathbf{X}'$ la catégorie X'/F est connexe i.e. $\pi_0(X'/F) = 1$

Sans hypothèse sur F, soit $T_C = T$ l'objet final de $\hat{X}$ défini par $T(X) = 1$ pour tout X.

D'après Kan, $F_!(T)(X') = \pi_0(X'/F)$.

Donc F final ssi $F_!(T_C) \simeq T_{C'}$ i.e. $F_!: \hat{X} \to \hat{X}'$ préserve les objets finaux.

Corollaires

1. Si $G: \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ et $F \sim G$, F final $\Longrightarrow G$ final;
2. Si $\mathbf{X}$ a un objet final 1, F final $\Longleftrightarrow F(1)$ est objet final (car $F_!$ préserve les représentables);
3. Soit
$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "F''"'] & & \mathbf{X}' \arrow[dl, "F'"] \\ & \mathbf{X}'' & \end{tikzcd}$$
commutatif (à isomorphisme près)

   (i) Si F et F' sont finaux, il en est de même pour F''
   (ii) Si F et F'' sont finaux, il en est de même pour F'
   (iii) Si F' est pleinement fidèle, F'' final ssi F et F' le sont.

4. Si $(F_i : \boldsymbol{X_i} \longrightarrow \boldsymbol{X'}_i)_{i \in I}$ est une famille de foncteurs et $F = \amalg F_i : \amalg \boldsymbol{X}_i \longrightarrow \amalg X'_i$ F est final ssi tous les F_i le sont.

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie, notons $\pi_0(X)$ la catégorie discrète ayant pour objets les composantes connexes de $\boldsymbol{X}$ et $\pi_C : \boldsymbol{X} \longrightarrow \pi_0(\boldsymbol{X})$ le foncteur canonique.

Si $F : \boldsymbol{X} \longrightarrow \boldsymbol{X'}$ est un foncteur, il existe un unique foncteur $\pi_0(F)$: $\pi_0(X) \longrightarrow \pi_0(X')$ rendant commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{X} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi_X"'] & \boldsymbol{X'} \arrow[d, "\pi_{X'}"] \\
\pi_0(\boldsymbol{X}) \arrow[r, "\pi_0(F)"'] & \pi_0(\boldsymbol{X'})
\end{tikzcd}$$

1. π_X est final.

2. Si F est final $\pi_0\,(F)$ est un iso (i.e. une bijection)

3. F est final ssi $\pi_0\,(F)$ est bijective et pour chaque composante connexe $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{X}$ le foncteur $F_C : \boldsymbol{C} \longrightarrow \pi_0\,(F)\,(\boldsymbol{C})$ induit par F est final.